STATISTICKÉ ZPRACOVÁNÍ DAT – FISHERŮV EXAKTNÍ TEST

Metoda chí kvadrát x Fisherův test

- Pro zjištění závislosti – metoda chí kvadrát
- V některých případech metodu chí kvadrát nelze použít
  - rozsah souboru menší než 20
  - očekávané četnosti jsou malé
- Lze použít Fisherův test - založen na jiném principu
- Fisherův exaktní test je založen na výpočtu přesné (exaktní) pravděpodobnosti, se kterou bychom za platnosti nulové hypotézy o nezávislosti veličin získali naší konkrétní realizaci kontingenční tabulky

Fisherův test

- Zjišťujeme závislost dvou kvalitativních veličin na prvcích téhož výběru
- Máme náhodný výběr rozsahu *n* rozdělený do dvou skupin (skupina 1, skupina 2)
- Skupiny mohou nabývat hodnotu jednoho ze dvou znaků (znak 1, znak 2)
- Příkladem - skupina ženy, muži, znak kouří, nekouří
- Úkolem testu je rozhodnout, zda znaky jsou na sobě závislé nebo nezávislé (zda znak 1 má vliv na znak 2)
- Fisherův exaktní test odvozen pro kontingenční tabulku 2x2 tzv. čtyřpolní tabulku, ale existuje i jeho zobecnění pro libovolnou kontingenční tabulku

ZÁKLADNÍ PRINCIP FISHEROVA TESTU

- Testujeme nulovou hypotézu proti alternativní hypotéze.
- Nulová hypotéza H_0: znaky 1 a 2 jsou nezávislé (Pozorované četnosti by měly odpovídat očekávaným četnostem
- Alternativní hypotéza H_1: Mezi znaky 1, 2 je závislost

- Nepředpokládá se, že teoretické rozdělení četností je známé, ale počítá se přímo pravděpodobnost odchylky od nulové hypotézy
- Při testování se generují varianty pozorované tabulky četností a určuje se pravděpodobnost výskytu všech obměn, které mají stejné součty okrajových četností
- Hlavní myšlenkou testu je výpočet pravděpodobnosti, se kterou bychom získali čtyřpolní tabulky stejně nebo více vzdálené od nulové hypotézy při zachování marginálních četností

VÝPOČET TESTOVÉ STATISTIKY

	Znak 1	Znak 2	Součet
Skupina 1	*a*	*b*	*a+b*
Skupina 2	*c*	*d*	*c+d*
Součet	*a+c*	*b+d*	*n*

Čtyřpolní tabulka

a, *b*, *c*, *d* četnosti
a+b, c+d, a+c, b+d okrajové četnosti tzv. marginální četnosti.

- Z hodnot *a*, *b*, *c*, *d* se vybere hodnota a od té se postupně odečítá a po té přičítá hodnota 1, aby součet okrajových četností zůstal stejný a byly vyčerpány všechny možné případy. Např. pokud se od hodnoty *a* odečte 1, musí se k hodnotě *b* přičíst 1, k hodnotě *c* přičíst 1 a od hodnoty *d* odečíst 1, aby okrajové četnosti zůstaly stejné
- Generují se všechny možné varianty tabulky četností
- Pro původní a každou vygenerovanou tabulku se vypočítá pravděpodobnost

Vzorec pro výpočet pravděpodobnosti

$$p_i = \frac{\binom{a+c}{a}\binom{b+d}{b}}{\binom{n}{a+b}} = \frac{(a+b)!\,(c+d)!\,(a+c)!\,(b+d)!}{n!\,a!\,b!\,c!\,d!}$$

p_i	pravděpodobnost vypočtená z tabulky *i*
a, b, c, d	četnosti uvnitř tabulky *i*
n	*rozsah souboru*

Hodnota testového kritéria

- Hodnotou testového kritéria testové statistiky je součet všech vypočtených pravděpodobností menších nebo stejných jako hodnota pravděpodobnosti, která přísluší čtyřpolní tabulce sestrojené na základě pozorovaných hodnot
- Hodnota testového kritéria se porovnává s hladinou významnosti α
- V případě oboustranného testu se sčítají hodnoty všech vypočtených pravděpodobností u tabulek, které jsou menší nebo rovny než skutečná zjištěná četnost
- Pokud je $\sum p_i < \alpha$, potom nulovou hypotézu o nezávislosti zamítáme a přijímáme hypotézu, že určitá závislost existuje

Příklad 1

- Skupina 1 a 2, znak 1 a 2, zkoumáme závislost mezi skupinami a znaky
- Hladina významnosti 5 %
- Ze získaných dat vytvoříme čtyřpolní tabulku

	Znak 1	Znak 2	Součet
Skupina 1	2	5	7
Znak 2	3	2	5
Součet	5	7	12

- Z této tabulky vybereme hodnotu 2 (skupina 1, znak 1) a od hodnoty 2 postupně odečítáme 1 a po té přičítáme hodnotu 1
- Ostatní hodnoty doplňujeme tak, aby součet okrajových četností zůstal stejný
- Dostaneme následující tabulky:

	Znak 1	Znak 2	Součet
Skupina 1	0	7	7
Znak 2	5	0	5
Součet	5	7	12

	Znak 1	Znak 2	Součet
Skupina 1	1	6	7
Znak 2	4	1	5
Součet	5	7	12

	Znak 1	Znak 2	Součet
Skupina 1	3	4	7
Znak 2	2	3	5
Součet	5	7	12

	Znak 1	Znak 2	Součet
Skupina 1	4	3	7
Znak 2	1	4	5
Součet	5	7	12

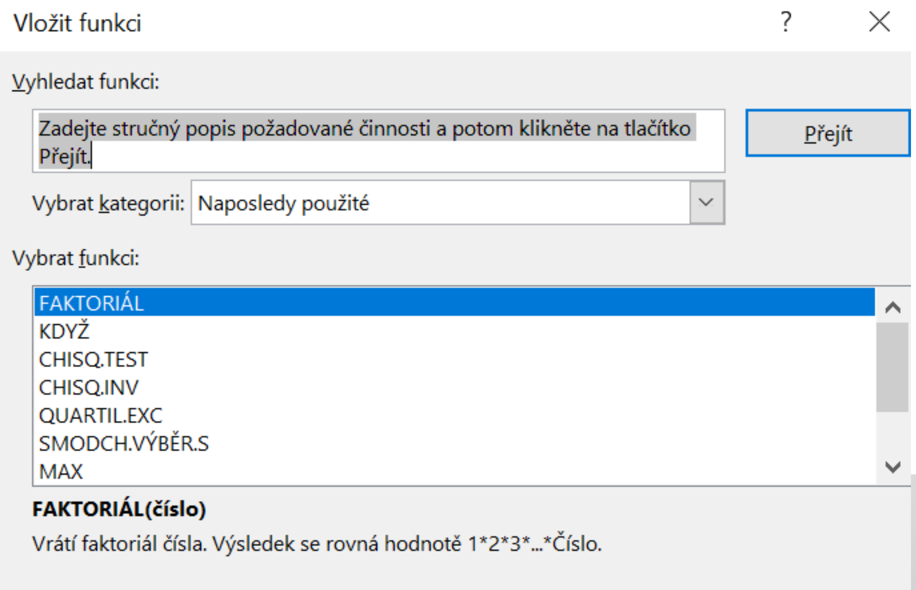
	Znak 1	Znak 2	Součet
Skupina 1	5	2	7
Znak 2	0	5	5
Součet	5	7	12

	Znak 1	Znak 2	Součet
Skupina 1	2	5	7
Znak 2	3	2	5
Součet	5	7	12

$$p = \frac{\binom{a+c}{a}\binom{b+d}{b}}{\binom{n}{a+b}} = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{n!a!b!c!d!} = \frac{(2+5)!(3+2)!(2+3)!(5+2)!}{12!2!5!3!2!} = \frac{7!\,5!\,5!\,7!}{12!\,2!\,5!\,3!\,2!} =$$

$$= \frac{7!\,5!\,5!\,7!}{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 2!\,5!\,3!\,2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 2} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{8\cdot 9\cdot 11} = \frac{7\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 9\cdot 11} = \frac{7\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 11} = \frac{35}{132} =$$

$$= 0{,}265152$$



- Pravděpodobnost pro čtyřpolní tabulku sestrojenou na základě pozorovaných hodnot je 0,265152
- Menší nebo stejné hodnoty nabývají pravděpodobnosti p_1, p_2, p_3, p_5
- Hodnota testové statistiky (*p*-hodnota) je součet všech vypočtených pravděpodobností menších nebo stejných jako hodnota pravděpodobnosti pro čtyřpolní tabulku sestrojenou na základě pozorovaných hodnot, tzn., že je $\sum p_i = p_1 + p_2 + p + p_3 + p_5 = 0{,}001263 + 0{,}044192 + 0{,}265152 + 0{,}220960 + 0{,}026515 = 0{,}558082$
- Není splněna podmínka $\sum p_i < \alpha$, platí $\sum p_i > 0{,}05$, nulovou hypotézu o nezávislosti přijímáme a lze konstatovat, že mezi skupinami 1 a 2 a znaky 1 a 2 není závislost

p-hodnota

- *p*-hodnota je nejmenší hladina významnosti, při které ještě zamítneme nulovou hypotézu
- *p*-hodnota je pravděpodobnost, že při platnosti nulové hypotézy nabývá testová statistika své stávající hodnoty anebo hodnot ještě extrémnějších (nepříznivějších vůči nulové hypotéze)
- *p*-hodnota je pravděpodobnost, s jakou bychom mohli obdržet pozorovaná data nebo data stejné, či ještě více odporující nulové hypotéze, za předpokladu, že je nulová hypotéza pravdivá. Čím menší je *p*, tím neudržitelnější čili méně důvěryhodná je nulová hypotéza

- Generování všech možných variant tabulky četností je poměrně pracné, ale existuje řada programů, kde stačí zadat hodnoty zjištěných četností do tabulky a výsledkem je hodnota testové statistiky
- Příkladem vhodného programu je odkaz na http://www.langsrud.com/fisher.htm
- Aplikaci, která umožnuje zobecnění na kontingenční tabulku max 2x5 https://quantitativeskills.com/sisa/statistics/fiveby2.htm

Fisherův přesný test

VYPOČÍTAT

3	1
1	3

PŘEHLEDNÝ STŮL

ČISTÝ VÝSTUP

ÚVOD

Vytvořil
©
Øyvind Langsrud

Německá verze

```
        Fisher's Exact Test
https://www.langsrud.com/fisher.htm
------------------------------------------
```

ÚVOD

Na této stránce lze statisticky otestovat, zda existuje nějaký vztah mezi dvěma kategorické proměnné (se dvěma úrovněmi). Vyplňte tabulku a stiskněte COMPUTE.

Výstup se skládá ze tří p-hodnot:

- **Vlevo:** Použijte tuto možnost, pokud je alternativou k nezávislosti to, že existuje negativní Asociace mezi proměnnými.
  To znamená, že pozorování mají tendenci ležet vlevo dole a vpravo nahoře.
- **Vpravo:** Použijte tuto možnost, pokud je alternativou k nezávislosti to, že existuje pozitivní Asociace mezi proměnnými.
  To znamená, že pozorování mají tendenci ležet vlevo nahoře a vpravo dole.
- **2-ocas:** Tuto možnost použijte, pokud neexistuje žádná předchozí alternativa.

POZNÁMKA: Rozhodněte se použít levý, pravý nebo 2-Tail předtím shromažďování (nebo prohlížení) dat.

Příkladem takových údajů (neskutečných) je 100 osob klasifikovaných po sexu a e-mailu adresa:

	ženský	muž
E-mailová adresa	3	15
bez e-mailové adresy	37	45

tj. 3 ze 40 žen mají e-mailovou adresu a 15 z 60 mužů má e-mailovou adresu.

Údaje mohly být shromažďovány různými způsoby:

1. Zeptali jsme se 60 mužů a 40 žen. To znamená, že celkový počet mužů a žen je pevně daný.
2. Zeptali jsme se 100 osob na jejich pohlaví a na to, zda mají e-mail adresa. To znamená, že předem je stanoven pouze celkový počet osob.
3. Zeptali jsme se všech osob v Norsku narozených 24/11-68. Tj.: Celkový počet osob není předem stanovena.

Dvoustranná p-hodnota se vypočítá podle definice v Agresti (1992) § 2.1. b).
ODKAZ: Agresti A, (1992), Přehled exaktní inference pro kontingenční tabulky, *Statitical Science*, 7,131-153

	Znak 1	Znak 2	Součet
Skupina 1	2	5	7
Znak 2	3	2	5
Součet	5	7	12

$$\sum p_i = p_1 + p_2 + p + p_3 + p_5 =$$

$$= 0{,}001263 + 0{,}044192 + 0{,}265152 + 0{,}220960 + +0{,}026515 =$$

$$=0{,}558082$$

Fisherův přesný test pro křížový stůl 2*5 nebo r

https://quantitatives...

Aktualizovat (Ctrl+R)

SISA

Přesně pět krát dva

R1: 2;
5 ks

R2: 3;
2 ks

R3: 0;
0

R4: 0;
0

R5: 0;
0

R6: 0;
0

R7: 0;
0

bodprob: 0.26515
pro získání přesně této tabulky vzhledem k marginálíímchí-kvadrát
oba s 1 stupněm volnosti
Pearson: 1.185 (p= 0.27628)
LRX: 1.195 (p= 0.27437)

Více:

Analýza
tabulky dva po dvouchí-kvadráty, poměry rizika, poměry šancí a další statistiky tabulkyT-test, NNT, PARF
první sloupec proti součtům řádků
první řádek proti součtům
sloupců

Nápovědu najdete na webu SISA

Tabulka 2x2

https://quantitatives...

SISA

Tabulková analýza dva krát dva

Řádek 1: 2 5

Řádek 2: 3 2

CI: 95 %

z pro 95% CI= 1.96

Celkový počet případů v tabulce 12
Nejmenší buňka obsahuje 2 případy
Zvažte použití Fisher.
Chi kvadráty
(všechny s 1 stupněm volnosti):Pearson's= 1.185 (p=0.276278) *
Věrohodnostní poměr= 1.195 (p=0.27437)
Yate's= 0.245 (p=0.62069)
Mantel Haenszel= 1.087 (p=0.29724)

Nápovědu najdete na webu SISA

Více:

Fisherův exaktní testT-test, NNT, PARF
první sloupec proti součtům řádků
první řádek proti součtům
sloupců

Fisherův exaktní test


https://www.quantitativeskills.com/sisa/statistics/fisher.php?n11=2&n12=5&n21=3&n22=2&CI=95

SISA

Fisherův exaktní test

Řádek 1: 2; 5

Řádek 2: 3; 2

Celkový počet případů= 12
Nejmenší hodnota= 2
Nejmenší mezní= 5

Doporučuje se používat statistiky * (označené hvězdičkou)

p přesně pro tuto tabulku= 0.26515

Jednostranné p-hodnoty: pro p(O>=E):
p(O>=E): 0,3106061 *
p(O>E): 0,0454545
střední p: 0,1780303
p(O<=E): 0,9545455

Oboustranné p-hodnoty p(O>=E|O<=E):
p= 0.5580808 * (součet malých p)
p= 0.2651515 (vlevo+vpravo-přesně)
p= 0.3560606 (vlevo+vpravo)
p= 0.621212 (dvojnásobek jednostranného p)
p(O>E|O<E)= 0.29293 (součet malých p's)
mid-p 0.4255051 (součet malých p's)

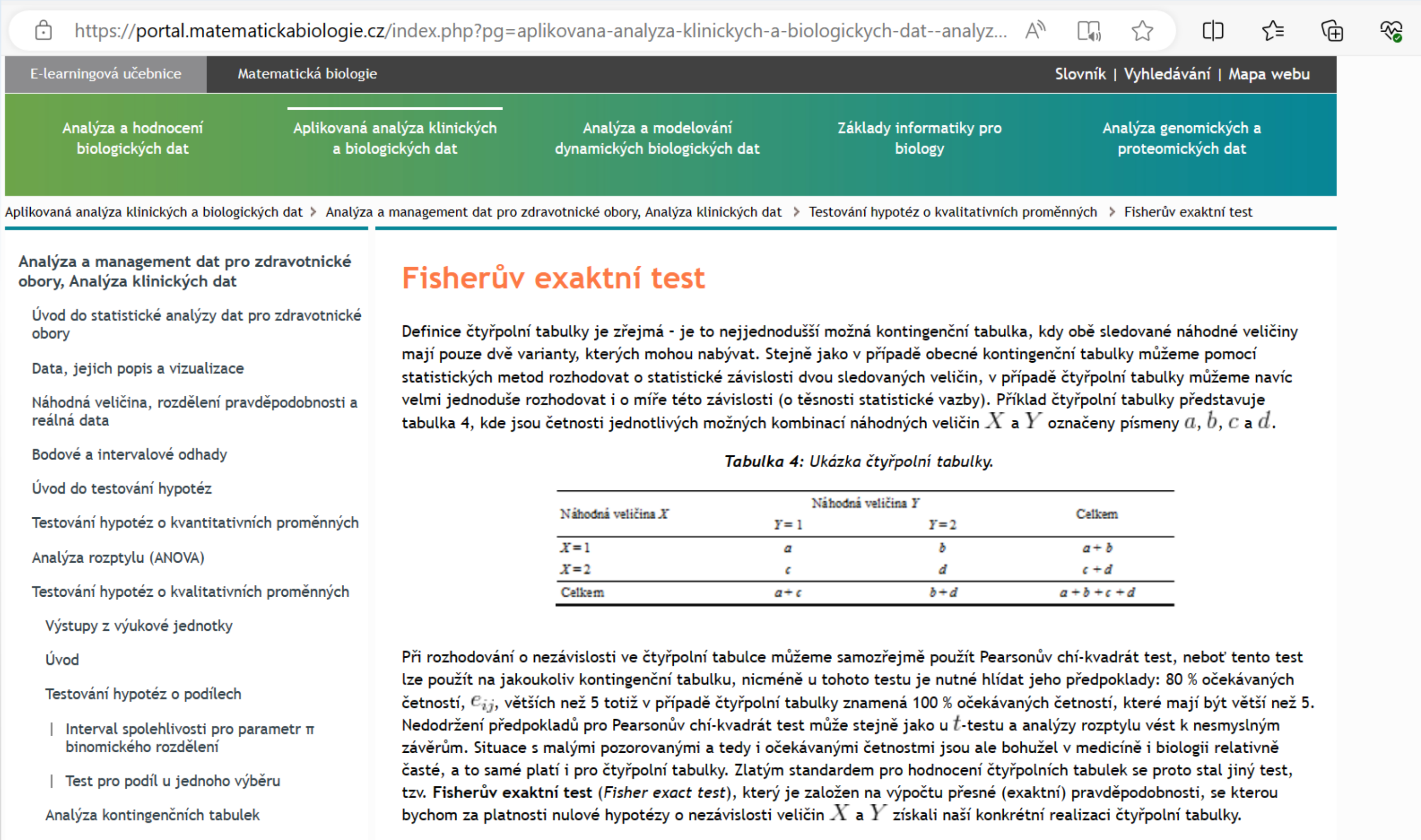
Nápovědu najdete na webu SISA

Výpočet byl

p = 0,558082

Příklad 2

- http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickych-a-biologickych-dat--analyza-a-management-dat-pro-zdravotnicke-obory--testovani-hypotez-o-kvalitativnich-promennych--fisheruv-exaktni-test



https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickych-a-biologickych-dat--analyz...

E-learningová učebnice | Matematická biologie | Slovník | Vyhledávání | Mapa webu

Analýza a hodnocení biologických dat | Aplikovaná analýza klinických a biologických dat | Analýza a modelování dynamických biologických dat | Základy informatiky pro biology | Analýza genomických a proteomických dat

Aplikovaná analýza klinických a biologických dat > Analýza a management dat pro zdravotnické obory, Analýza klinických dat > Testování hypotéz o kvalitativních proměnných > Fisherův exaktní test

Fisherův exaktní test

Definice čtyřpolní tabulky je zřejmá - je to nejjednodušší možná kontingenční tabulka, kdy obě sledované náhodné veličiny mají pouze dvě varianty, kterých mohou nabývat. Stejně jako v případě obecné kontingenční tabulky můžeme pomocí statistických metod rozhodovat o statistické závislosti dvou sledovaných veličin, v případě čtyřpolní tabulky můžeme navíc velmi jednoduše rozhodovat i o míře této závislosti (o těsnosti statistické vazby). Příklad čtyřpolní tabulky představuje tabulka 4, kde jsou četnosti jednotlivých možných kombinací náhodných veličin X a Y označeny písmeny a, b, c a d.

Tabulka 4: *Ukázka čtyřpolní tabulky.*

Náhodná veličina X	Náhodná veličina Y		Celkem
	$Y = 1$	$Y = 2$	
$X = 1$	a	b	$a + b$
$X = 2$	c	d	$c + d$
Celkem	$a + c$	$b + d$	$a + b + c + d$

Při rozhodování o nezávislosti ve čtyřpolní tabulce můžeme samozřejmě použít Pearsonův chí-kvadrát test, neboť tento test lze použít na jakoukoliv kontingenční tabulku, nicméně u tohoto testu je nutné hlídat jeho předpoklady: 80 % očekávaných četností, e_{ij}, větších než 5 totiž v případě čtyřpolní tabulky znamená 100 % očekávaných četností, které mají být větší než 5. Nedodržení předpokladů pro Pearsonův chí-kvadrát test může stejně jako u t-testu a analýzy rozptylu vést k nesmyslným závěrům. Situace s malými pozorovanými a tedy i očekávanými četnostmi jsou ale bohužel v medicíně i biologii relativně časté, a to samé platí i pro čtyřpolní tabulky. Zlatým standardem pro hodnocení čtyřpolních tabulek se proto stal jiný test, tzv. **Fisherův exaktní test** (*Fisher exact test*), který je založen na výpočtu přesné (exaktní) pravděpodobnosti, se kterou bychom za platnosti nulové hypotézy o nezávislosti veličin X a Y získali naši konkrétní realizaci čtyřpolní tabulky.