

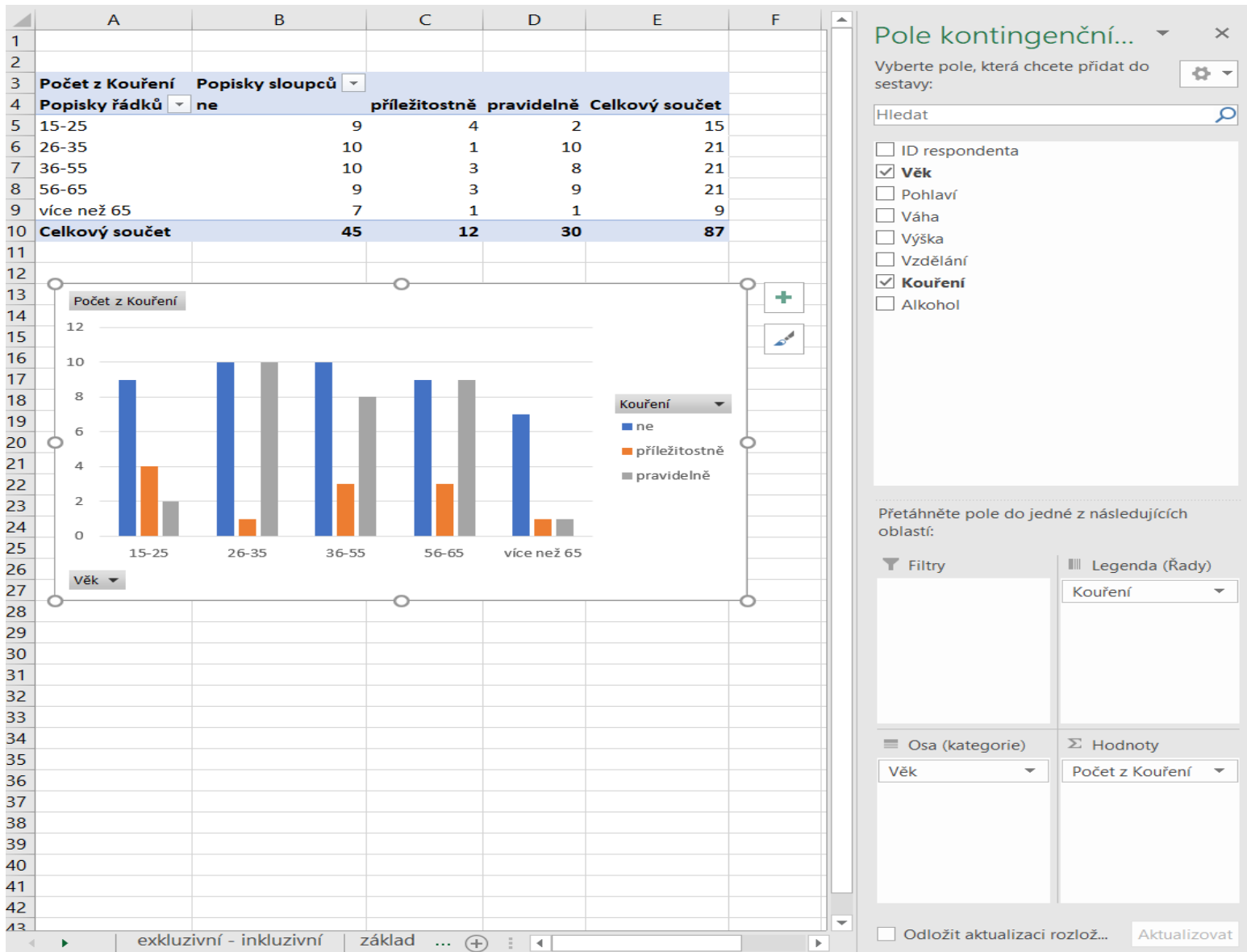
Test  $\chi^2$  (chí kvadrát)

# Test $\chi^2$ (chí kvadrát)

- Máme k dispozici náhodný výběr rozsahu  $n$  rozdělený do dvou znaků (znak 1, znak 2)
- Normální (Gaussovo rozdělení)
- Úkolem testu je rozhodnout, zda jsou znaky na sobě závislé nebo nezávislé (zda znak 1 má vliv na znak 2)
- Znak 1
- Znak 2



# Kontingenční tabulka



# Hypotézy

- Nulová hypotéza: znaky 1 a 2 jsou nezávislé
- Alternativní hypotéza: mezi znaky 1 a 2 existuje závislost

# Chyby testu

- Chyba 1. druhu - hladina významnosti  
Chceme ji mít pod dostatečnou kontrolou. Požadujeme, aby pravděpodobnost chyby 1. druhu nepřekročila námi předem zvolenou mez  $\alpha$ , tzv. hladinu testu, volíme zpravidla  $\alpha = 0,05$  nebo  $0,01$
  - Chyba 2. druhu  
Snažíme se ji minimalizovat
  - Obě chyby jsou vzájemně nepřímo úměrné. Jestliže  $H_0$  platí (tedy), pravděpodobnost zamítnutí  $H_0$  má být menší než  $\alpha$
1. Hypotéza  $H_0$  platí, hypotézu  $H_0$  zamítneme (chyba 1. druhu),
  2. Hypotéza  $H_0$  platí, hypotézu  $H_0$  nezamítneme,
  3. Hypotéza  $H_0$  neplatí, hypotézu  $H_0$  zamítneme,
  4. Hypotéza  $H_0$  neplatí, hypotézu  $H_0$  nezamítneme (chyba 2. druhu)

# Chyba testu

- Podobná situace nastává u soudu, kde roli nulové hypotézy hraje presumpce nevinny obžalovaného. Soudce na základě předložených důkazů zamítne jeho nevinu a odsoudí ho k trestu nebo naopak nezamítne jeho nevinu a neodsoudí ho, čímž však nijak netvrdí, že obžalovaný je skutečně nevinen. **Bud' je nevinen, nebo k prokázání jeho viny nemá soudce dostatek důkazů.**
- Stejně ve statistice, jestliže nulovou hypotézu nezamítneme, neznamená to ještě, že  $H_0$  skutečně platí. **Bud' je pravdivá, nebo pro její zamítnutí nemáme dostatek potřebných měření, dostatek informací.**

# Chyba testu

1. Nevinen, odsouzen -  $H_0$  platí,  $H_0$  zamítneme (chyba 1. druhu)
2. Nevinen, neodsouzen -  $H_0$  platí,  $H_0$  nezamítneme
3. Vinen, odsouzen -  $H_0$  neplatí,  $H_0$  zamítneme
4. Vinen, neodsouzen -  $H_0$  neplatí,  $H_0$  nezamítneme (chyba 2. druhu)

	Vinen	Nevinen
Odsouzen	Pravda	Nepravda - chyba 1. druhu
Neodsouzen	Nepravda – chyba 2. druhu	Pravda



# Postup výpočtu

1. Sestaví se tabulka skutečných (naměřených) četností
2. Vypočítají se očekávané četnosti
3. Zkontrolují se podmínky pro použití testu
4. Vypočte se testové kritérium
5. Testové kritérium se srovná s kritickou hodnotou
6. Vysloví se rozhodnutí

1. Sestaví se tabulka skutečných (naměřených) četností

Tabulka: Skutečné četnosti

	<b>znak1 - 1.skupina</b>	<b>znak1 - 2.skupina</b>	<b>...</b>	<b>celkem</b>
<b>znak2 - 1.skupina</b>	skutečné četnosti	skutečné četnosti	...	$n_{1\bullet}$
<b>znak2 - 2.skupina</b>	skutečné četnosti	skutečné četnosti	...	$n_{2\bullet}$
<b>znak2 - 3.skupina</b>	skutečné četnosti	skutečné četnosti	...	$n_{3\bullet}$
<b>...</b>	...	...	...	$n_{j\bullet}$
<b>celkem</b>	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$n_{\bullet j}$	$n$

$$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^s n_{ij} \quad n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^r n_{ij}$$

## 2. Vypočítají se očekávané četnosti

Tabulka: Očekávané četnosti

$$n'_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}$$

	<b>znak1 - 1.skupina</b>	<b>znak1 - 2.skupina</b>	<b>...</b>	<b>celkem</b>
<b>znak2 - 1.skupina</b>	očekávané četnosti	očekávané četnosti	...	$n_{1\bullet}$
<b>znak2 - 2.skupina</b>	očekávané četnosti	očekávané četnosti	...	$n_{2\bullet}$
<b>znak2 - 3.skupina</b>	očekávané četnosti	očekávané četnosti	...	$n_{3\bullet}$
<b>...</b>	...	...	...	$n_{i\bullet}$
<b>celkem</b>	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$n_{\bullet j}$	$n$

### 3. Zkontrolují se podmínky pro použití testu

#### Podmínky pro použití testu nezávislosti v kontingenční tabulce:

- nejvíce 20 % teoretických četností může být menších než 5
- žádná teoretická četnost nesmí být menší než 1

Pro tabulku 2x2:

- $n > 40$
- pokud  $20 < n < 40$ , pak je nutná úprava testového kritéria pomocí Yatesovy korekce
- pokud  $n < 20$ , pak použijeme Fisherův test

## Možnost při nesplnění podmínek

Skutečné četnosti

	18-20 let	21-25 let	26-30 let	31-35 let
Znak 2 – 1. skupina	2	5	26	45
Znak 2 – 2. skupina	2	7	28	30

Očekávané četnosti

	18-20 let	21-25 let	26-30 let	31-35 let
Znak 2 – 1. skupina	2,15	6,46	29,05	40,34
Znak 2 – 2. skupina	1,85	5,54	24,95	34,66

Test nelze použít, mohou se sloučit kategorie. Např. po sloučení

Skutečné četnosti

	18-25 let	26-30 let	31-35 let
Znak 2 – 1. skupina	7	26	45
Znak 2 – 2. skupina	9	28	30

Skutečné četnosti

	18-25 let	26-30 let	31-35 let
Znak 2 – 1. skupina	8,61	29,05	40,34
Znak 2 – 2. skupina	7,39	24,95	34,66

4. Vypočte se testové kritérium (dosazení do vzorce – výsledek hodnota)

## Testové kritérium

$$G = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - n'_{ij})^2}{n'_{ij}}$$

$r$	počet řádků
$s$	počet sloupců
$n_{ij}$	skutečné četnosti
$n'_{ij}$	očekávané četnosti

5. Testové kritérium se srovná s kritickou hodnotou (tabulková hodnota, je potřeba zohlednit počet stupňů volnosti)

**Kritické hodnoty testového kritéria chí-kvadrát**

Stupně volnosti	Hladina významnosti	
	0,05	0,01
1	3,841	6,635
2	5,991	9,21
3	7,815	11,341
4	9,483	13,277
5	11,070	15,086
6	12,592	16,812
7	14,067	18,475
8	15,507	20,09
9	16,919	21,666
10	18,307	23,209
11	19,675	24,725
12	21,026	26,217
13	22,362	27,688
14	23,685	29,141
15	24,996	30,578
16	26,296	32
17	27,587	33,409
18	28,868	34,805
19	30,144	36,191
20	31,410	37,566

## 6. Vysloví se rozhodnutí

- Je-li testové kritérium  $<$  kritická hodnota, potom nezamítáme nulovou hypotézu o nezávislosti a nezávislost lze předpokládat.
- Je-li testové kritérium  $>$  kritická hodnota, potom zamítáme nulovou hypotézu o nezávislosti a přijímáme alternativní hypotézu, která nám říká, že určitá závislost existuje.
- **Bud' je pravdivá, nebo pro její zamítnutí nemáme dostatek potřebných měření, dostatek informací.**



# Yatesova korekce (Yatesův chí-kvadrát test)

- upravuje vzorec pro Pearsonův chí-kvadrát test odečtením 0,5 od rozdílu mezi každou sledovanou hodnotou a její očekávanou hodnotou v kontingenční tabulce  $2 \times 2$

- $$G = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(n_{ij} - n'_{ij} - 0,5)^2}{n'_{ij}}$$

- snižuje to získanou chí-kvadrát hodnotu a tím zvyšuje její  $p$ -hodnotu
- zabraňuje nadhodnocení statistické významnosti u malých dat

<https://dbterapie.cz/encyklopedie/yatesova-korekce-kontinuity/>

Yates, F (1934). Kontingenční tabulka s malými čísly a  $\chi^2$  test. *Journal of the Royal Statistical Society (Supplement)* 1: 217-235.

# Příklad 1

- 2 vybrané otázky z dotazníku (2 znaky)

1. pohlaví

a) muž

b) žena

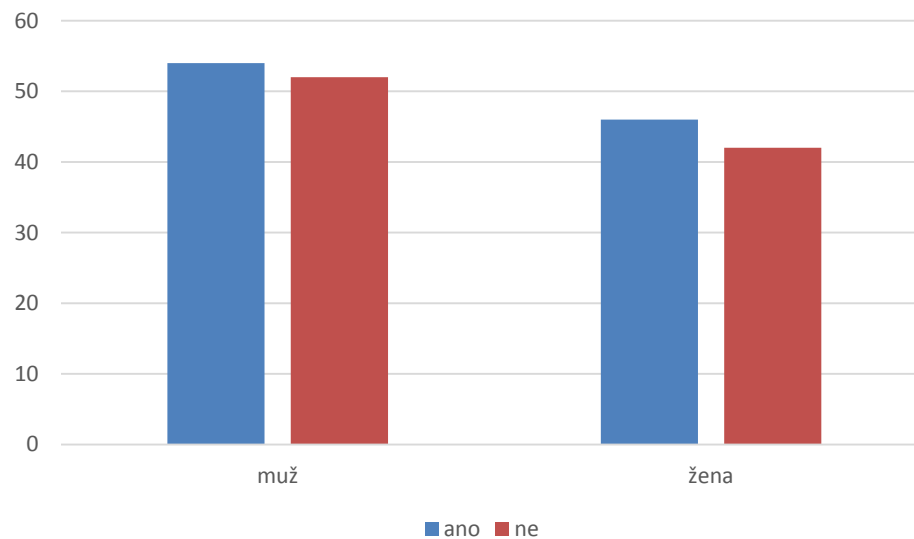
2. otázka

a) ano

b) ne

## Sestaví se tabulka skutečných četností

	ano	ne	celkem
muž	54	52	106
žena	46	42	88
celkem	100	94	194



- <http://www.milankabrt.cz/testNezavislosti/ind ex.php>

# Aplikovaná statistika

## Test chí-kvadrát nezávislosti v kontingenční tabulce

- » o aplikaci
- » aplikace

**Aplikovaná statistika**

Test chí-kvadrát nezávislosti v kontingenční tabulce

**Test chí-kvadrát nezávislosti v kontingenční tabulce**

**vzhled**

Tato webová aplikace byla vyvíjena na jaře roku 2011, kdy vznikla jako uplatnění semestrálního projektu z předmětu "Aplikovaná statistika" v rámci studia na katedře řízení kvality. Klíčové slovo: "Informační management".

Vytvořil Milan Kabrt

[specifikace aplikací](#)

	znack1 - 1.skupina	znack1 - 2.skupina	celkem
znack2 - 1.skupina	obsahující číselnosti	obsahující číselnosti	$n_{1j}$
znack2 - 2.skupina	obsahující číselnosti	obsahující číselnosti	$n_{2j}$
znack2 - 3.skupina	obsahující číselnosti	obsahující číselnosti	$n_{3j}$
...			$n_{kj}$
celkem	$n_{i1}$	$n_{i2}$	$n_{i.}$

$N_{1j} = \sum_{i=1}^k n_{ij}$      $N_{i.} = \sum_{j=1}^k n_{ij}$

V úvodní části máme doporučený stručně omezený seznam čísel. Následující částka však obsahuje obecně dané číselní údaje, jejichž počet je variabilní.

**Aplikovaná statistika**

Test chí-kvadrát nezávislosti v kontingenční tabulce

**vstupní parametry**

Počet skupin znacke 1: 2

Počet skupin znacke 2: 2

Hladina významnosti alpha: 10 %

[Připraveno](#)

© CREATED BY: Milan Kabrt | www.milankabrt.cz

# Aplikovaná statistika

» o aplikaci

» aplikace

## Test chí-kvadrát nezávislosti v kontingenční tabulce

základní parametry

relativní četnosti

výsledek

1

Počet skupin **znaku 1**: ?

Počet skupin **znaku 2**: ?

Hladina významnosti  **$\alpha$** : ?

Pokračovat

# Aplikovaná statistika

» o aplikaci

» aplikace

## Test chí-kvadrát nezávislosti v kontingenční tabulce

základní parametry

relativní četnosti

výsledek

1

Počet skupin znaku 1:

Počet skupin znaku 2:

Hladina významnosti  $\alpha$ :

2

Zadejte do tabulky naměřené relativní četnosti: ?

	znak1 - 1. sk.	znak1 - 2. sk.
znak2 - 1. sk.	<input type="text" value="54"/>	<input type="text" value="52"/>
znak2 - 2. sk.	<input type="text" value="46"/>	<input type="text" value="42"/>

zpět

pokračovat

základní parametry

relativní četnosti

výsledek

### Výsledek testu

Počet skupin znaku 1: 2

Počet skupin znaku 2: 2

Hladina významnosti  $\alpha$ : 5 %

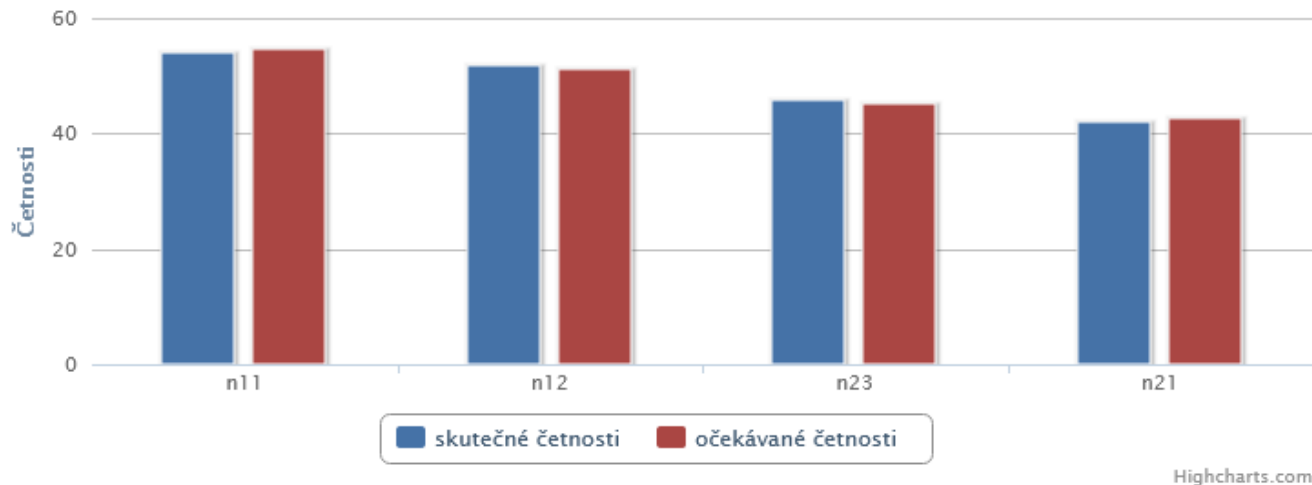
#### Skutečné četnosti

	znak1 - 1. sk.	znak1 - 2. sk.	$n_{.j}$
znak2 - 1. sk.	54	52	106
znak2 - 2. sk.	46	42	88
$n_{i.}$	100	94	194

#### Očekávané četnosti

	znak1 - 1. sk.	znak1 - 2. sk.	$n_{.j}$
znak2 - 1. sk.	54.64	51.36	106
znak2 - 2. sk.	45.36	42.64	88
$n_{i.}$	100	94	194

## skutečné a očekávané četnosti



**testové kritérium:**

$$G = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - n'_{ij})^2}{n'_{ij}}$$

Po dosazení do vzorce vychází testové kritérium:  
 $G = 0.034$

**Kritická hodnota:**

Kritická hodnota:  
 $\chi_{(1-\alpha); df} = 3.841$

**Rozhodnutí:**

**Na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu ( $H_0$ ) o nezávislosti jednotlivých znaků nezamítáme.**

Spustit znovu



# Bakalářská práce

- Provedli jsme test nezávislosti chí-kvadrát. Zkoumali jsme, zda existuje vztah mezi pohlavím a odpovědí na otázku ... Hladinu významnosti jsme zvolili 5 %. Vytvořili jsme kontingenční tabulku, tabulku skutečných četností, dále jsme vypočítali očekávané četnosti. V tabulce očekávaných četností jsme zkontrolovali podmínky pro použití testu. Podmínky byly splněny a test jsme mohli použít. Hodnota vypočteného testového kritéria je ... Protože kritická hodnota je větší než vypočtená hodnota, z provedeného testu vyplývá, že nezamítáme nulovou hypotézu o nezávislosti.

# Příklad 2

- 2 vybrané otázky z dotazníku (2 znaky)

1. pohlaví

a) muž

b) žena

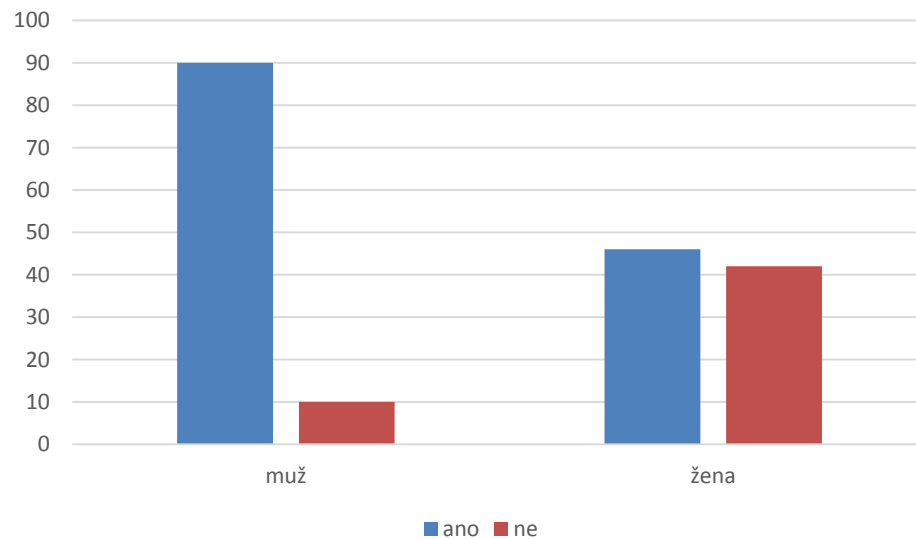
2. otázka

a) ano

b) ne

## Sestaví se tabulka skutečných četností

	ano	ne	celkem
muž	90	10	100
žena	46	42	88
celkem	136	52	188



Vypočítají se očekávané četnosti

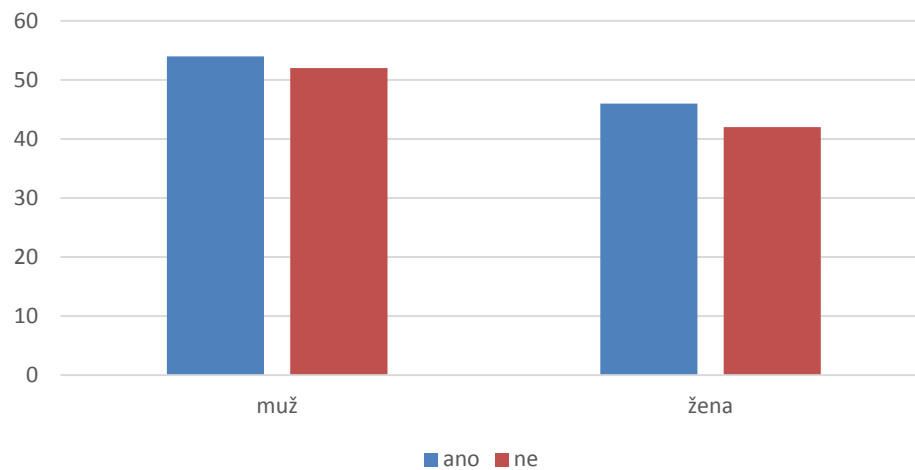
	ano	ne	celkem
muž	72,34	27,66	100
žena	63,66	24,34	88
celkem	136	52	188

- Testové kritérium 32,299
- Kritická hodnota pro 1 stupeň volnosti a hladinu významnosti 5 % je 3,841
- $32,299 > 3,841$
- Rozhodnutí: Na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu ( $H_0$ ) o nezávislosti jednotlivých znaků zamítáme a přijímáme hypotézu  $H_1$ , která nám říká, že zde určitá závislost existuje.

# Bakalářská práce

- Provedli jsme test nezávislosti chí-kvadrát. Zkoumali jsme, zda existuje vztah mezi pohlavím a odpovědí na otázku ... Hladinu významnosti jsme zvolili 5 %. Vytvořili jsme kontingenční tabulku, tabulku skutečných četností, dále jsme vypočítali očekávané četnosti. V tabulce očekávaných četností jsme zkontrolovali podmínky pro použití testu. Podmínky byly splněny a test jsme mohli použít. Hodnota vypočteného testového kritéria je ... Protože kritická hodnota je menší než vypočtená hodnota, z provedeného testu vyplývá, že zamítáme nulovou hypotézu o nezávislosti a přijímáme alternativní hypotézu, která nám říká, že určitá závislost zde existuje.

### Nezávislost



### Závislost



	ano	ne	celkem
muži	50	50	=SUMA(B2:C2)
ženy	50	50	=SUMA(B3:C3)
celkem	=SUMA(B2:B3)	=SUMA(C2:C3)	=SUMA(B4:C4)
	ano	ne	celkem
muži	=D2*B4/D4	=D2*C4/D4	=SUMA(B7:C7)
ženy	=D3*B4/D4	=D3*C4/D4	=SUMA(B8:C8)
celkem	=SUMA(B7:B8)	=SUMA(C7:C8)	=SUMA(B9:C9)
testová statistika		=POWER(B2-B7;2)/B7	=POWER(C2-C7;2)/C7
		=POWER(B3-B8;2)/B8	=POWER(C3-C8;2)/C8
		=C11+D11+C12+D12	
kritická hodnota		3,841	
Cramerův koeficient		=ODMOCNINA(C14/D9*(2-1))	
Pearsonův koeficient		=ODMOCNINA((C14/(C14+D4))/((2-1)/2))	



# Korigovaný koeficient kontingence pomocí Pearsona

$$C_{kor} = \frac{\sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}}{\sqrt{\frac{m-1}{m}}}$$

kde  $\chi^2$  je hodnota testového kritéria

$n$  je rozsah souboru

$m$  je počet řádků nebo počet sloupců v kontingenční tabulce (je-li větší počet řádků, je  $m$  počet řádků; je-li větší počet sloupců, je  $m$  počet sloupců)

# Cramerův koeficient

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(m-1)}}$$

$\chi^2$  je hodnota testového kritéria

$n$  je rozsah souboru

$m$  je počet řádků nebo počet sloupců

v kontingenční tabulce (je-li větší počet řádků, je  $m$  počet řádků; je-li větší počet sloupců, je  $m$  počet sloupců)

# $p$ hodnota - Excel

## **CHISQ.TEST (funkce)**

Vrátí test nezávislosti. Funkce CHISQ.TEST vrátí hodnotu rozdělení chí-kvadrát ( $\chi^2$ ) pro dané testové kritérium a příslušné stupně volnosti. Pomocí testů  $\chi^2$  můžete určit, zda experiment potvrzuje předpokládané výsledky.

## **Syntaxe**

CHISQ.TEST(aktuální, očekávané)

$p < 0,05 \rightarrow$  nezávislost zamítáme, určitá závislost existuje

## Skutečné četnosti

	ano	ne	celkem
muž	54	52	106
žena	46	42	88
celkem	100	94	194

$$n'_{11} = \frac{106 \cdot 100}{194} = 54,6$$

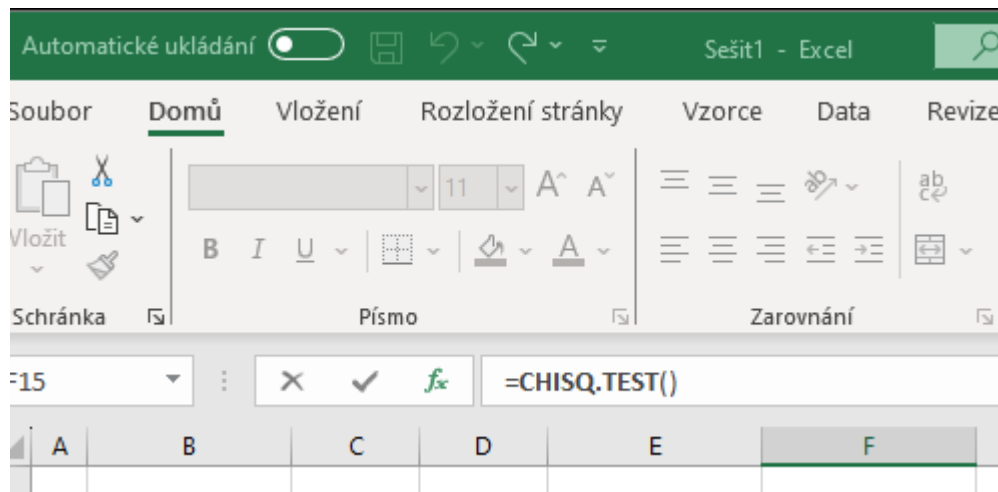
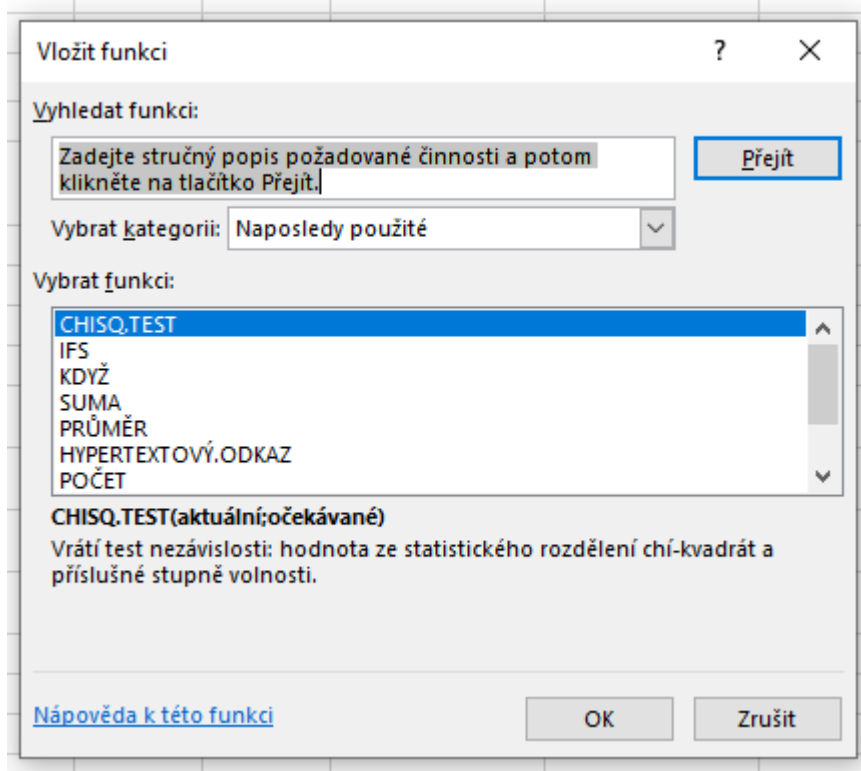
$$n'_{12} = \frac{106 \cdot 94}{194} = 51,4$$

$$n'_{21} = \frac{88 \cdot 100}{194} = 45,4$$

$$n'_{22} = \frac{88 \cdot 94}{194} = 42,6$$

## Očekávané četnosti

	ano	ne	celkem
muž	54,6	51,4	106
žena	45,4	42,6	88
celkem	100	94	194



	54	52	
	46	42	
	54,6	51,4	
	45,4	42,6	=CHISQ.TEST(B3:C4;B7:C8)

Argumenty funkce

CHISQ.TEST

Aktuální B3:C4 = {54\52;46\42}

Očekávané B7:C8 = {54,6\51,4;45,4\42,6}

= 0,862541253

Vrátí test nezávislosti: hodnota ze statistického rozdělení chí-kvadrát a příslušné stupně volnosti.

Očekávané je oblast dat obsahující podíl součinu součtů řádků a sloupců a celkového součtu.

Výsledek = 0,862541253

[Nápověda k této funkci](#) OK Zrušit

Automatické ukládání  Sešit1 - Excel

Soubor **Domů** Vložení Rozložení stránky Vzorce Data

Vložit

Schránka

Calibri 11 A<sup>^</sup> A<sup>v</sup>

B I U 

--

--

 A

Písmo Zarovnání

D16

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		54	52				
4		46	42				
5							
6							
7		54,6	51,4				
8		45,4	42,6		0,862541		
9							
10							
11							

$p$ -hodnota = 0,862541

$p > 0,05 \rightarrow$  přijímáme nulovou hypotézu o nezávislosti

## Skutečné četnosti

	ano	ne	celkem
muž	90	10	100
žena	46	42	88
celkem	136	52	188

$$n'_{11} = \frac{100 \cdot 136}{188} = 72,3$$

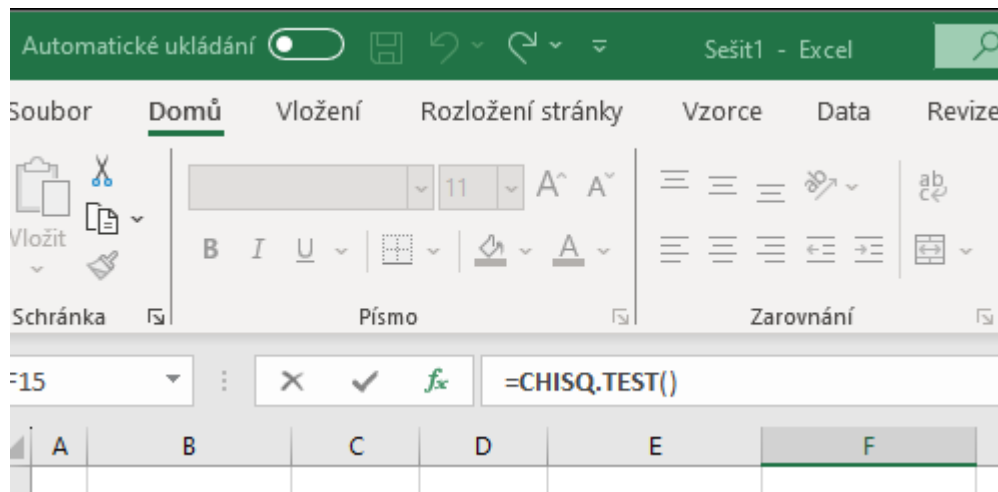
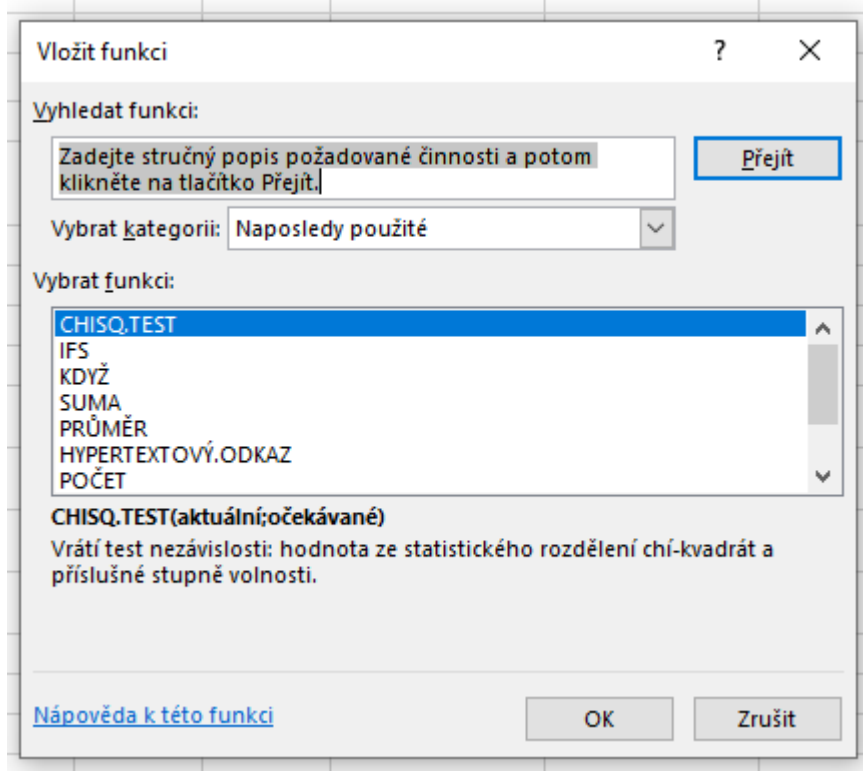
$$n'_{12} = \frac{100 \cdot 52}{188} = 27,7$$

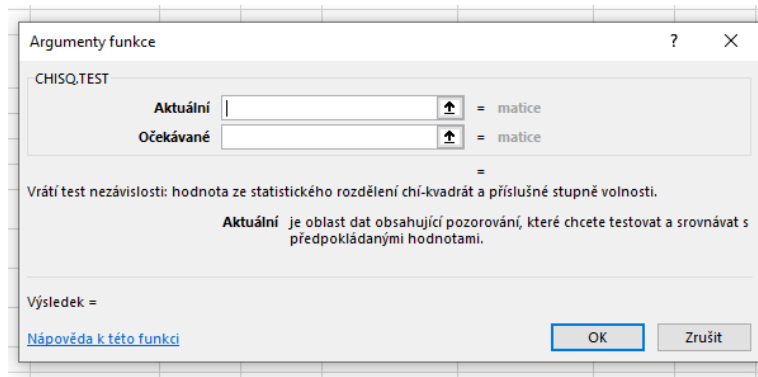
$$n'_{21} = \frac{88 \cdot 136}{188} = 63,7$$

$$n'_{22} = \frac{88 \cdot 52}{188} = 24,3$$

## Očekávané četnosti

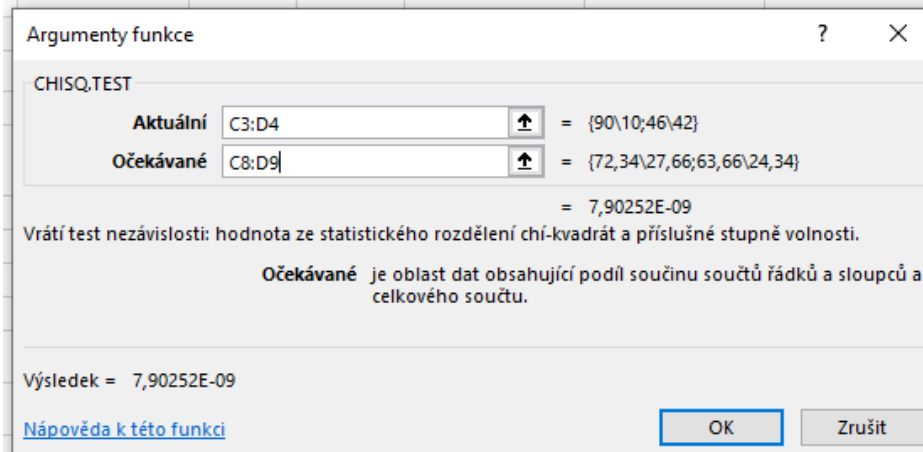
	ano	ne	celkem
muž	72,3	27,7	100
žena	63,7	24,3	88
celkem	136	52	188





	ano	ne	celkem
muž	90	10	100
žena	46	42	88
celkem	136	52	188

	ano	ne	celkem
muž	72,3	27,7	100
žena	63,7	24,3	88
celkem	136	52	188





	ano	ne	celkem
muž	90	10	100
žena	46	42	88
celkem	136	52	188

	ano	ne	celkem
muž	72,3	27,7	100
žena	63,7	24,3	88
celkem	136	52	188

7,9E-09			
---------	--	--	--

$p$ -hodnota =  $7,9 \cdot 10^{-9}$

$p < 0,05 \rightarrow$  nezávislost zamítáme, určitá závislost existuje

# $p$ -hodnota

$p$ -hodnota je nejmenší hladina významnosti, při které ještě zamítneme nulovou hypotézu

$p$ -hodnota je pravděpodobnost, že při platnosti nulové hypotézy nabývá testová statistika své stávající hodnoty anebo hodnot ještě extrémnějších (nepříznivějších vůči nulové hypotéze)

$p$ -hodnota je pravděpodobnost, s jakou bychom mohli obdržet pozorovaná data nebo data stejná, či ještě více odporující nulové hypotéze, za předpokladu, že je nulová hypotéza pravdivá. Čím menší je  $p$ , tím neudržitelnější čili méně důvěryhodná je nulová hypotéza