Test χ^2 (chí kvadrát)

Test χ^2 (chí kvadrát)

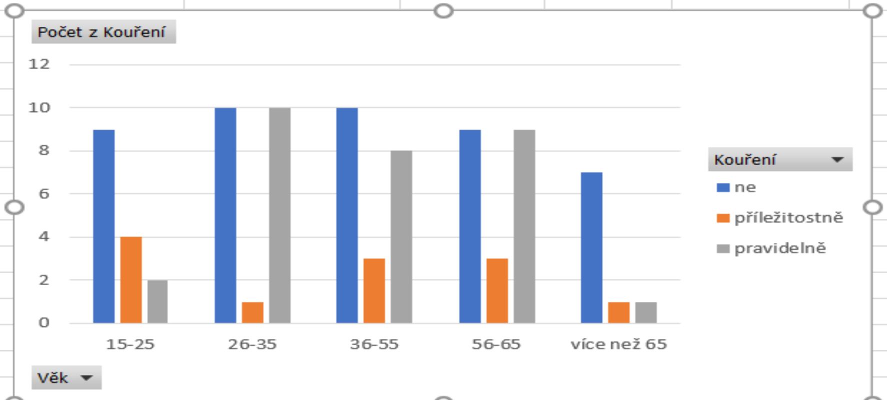
- Máme k dispozici náhodný výběr rozsahu *n* rozdělený do dvou znaků (znak 1, znak 2)
- Úkolem testu je rozhodnout, zda jsou znaky na sobě závislé nebo nezávislé (zda znak 1 má vliv na znak 2)
- Znak 1
- Znak 2

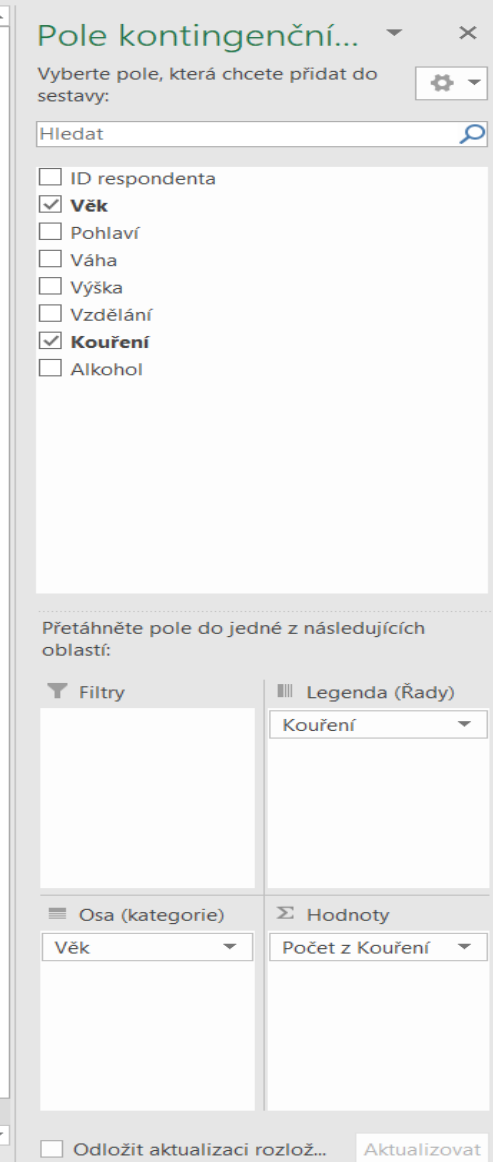
Surová data

ID respondenta	Věk	Pohlaví	Váha	Výška	Vzdělání	Kouření	Alkohol
1	36-55	žena	75	176	SŠ	ne	ne
2	26-35	žena	76	178	SŠ	pravidelně	ne
3	15-25	muž	90	183	SŠ	ne	příležitostně
4	36-55	žena	80	178	SŠ	ne	ne
5	15-25	žena	70	178	VŠ	ne	ne
6	15-25	muž	90	191	SŠ	ne	ne
7	26-35	žena	69	173	VŠ	ne	ne
8	56-65	žena	139	178	SŠ	ne	ne
9	36-55	žena	72	180	SŠ	ne	ne
10	26-35	žena	65	173	VŠ	ne	ne
11	56-65	muž	93	185	SŠ	ne	pravidelně
12	36-55	žena	70	175	ZŠ	pravidelně	pravidelně
13	56-65	žena	64	164	SŠ	pravidelně	ne
14	56-65	muž	70	171	ZŠ	ne	pravidelně
15	56-65	muž	67	162	SŠ	pravidelně	pravidelně
16	36-55	muž	89	178	SŠ	příležitostně	pravidelně
17	36-55	žena	63	165	SŠ	pravidelně	ne
18	56-65	muž	99	187	VŠ	ne	pravidelně
19	56-65	žena	85	155	SŠ	pravidelně	příležitostně
20	15-25	žena	53	170	SŠ	ne	ne
21	15-25	muž	82	190	SŠ	ne	ne
22	56-65	žena	69	152	SŠ	pravidelně	ne
23	36-55	muž	66	175	SŠ	pravidelně	příležitostně
24	56-65	muž	110	177	ZŠ	příležitostně	příležitostně
25	15-25	žena	65	175	VŠ	ne	příležitostně
26	15-25	žena	57	157	VŠ	příležitostně	příležitostně
27	56-65	muž	90	185	SŠ	příležitostně	ne
28	26-35	muž	70	190	VŠ	příležitostně	příležitostně
29	36-55	muž	94	180	SŠ	příležitostně	příležitostně
30	56-65	muž	75	170	SŠ	pravidelně	příležitostně
31	26-35	žena	54	169	VŠ	pravidelně	ne
32	26-35	žena	60	170	VŠ	ne	příležitostně
33	36-55	žena	62	171	VŠ	pravidelně	ne
34	56-65	žena	49	58	SŠ	ne	pravidelně
35	15-25	muž	60	183	SŠ	pravidelně	příležitostně
36	26-35	žena	50	160	SŠ	pravidelně	pravidelně
37	36-55	žena	68	153	SŠ	ne	ne
38	56-65	žena	65	167	ZŠ	pravidelně	příležitostně
39	56-65	žena	45	150	ZŠ	příležitostně	pravidelně
40	15-25	žena	54	155	SŠ	ne	příležitostně
41	36-55	žena	75	172	ZŠ	příležitostně	ne
42	26-35	žena	69	168	ZŠ	pravidelně	příležitostně

Kontingenční tabulka

Počet z Kouření	Popisky sloupců			
Popisky řádků	**ne**	**příležitostně**	**pravidelně**	**Celkový součet**
15-25	9	4	2	15
26-35	10	1	10	21
36-55	10	3	8	21
56-65	9	3	9	21
více než 65	7	1	1	9
Celkový součet	**45**	**12**	**30**	**87**





exkluzivní - inkluzivní | základ | ...

Hypotézy

- Nulová hypotéza: znaky 1 a 2 jsou nezávislé
- Alternativní hypotéza: mezi znaky 1 a2 existuje závislost

Chyby testu

- Chyba 1. druhu - hladina významnosti

  Chceme ji mít pod dostatečnou kontrolou. Požadujeme, aby pravděpodobnost chyby 1. druhu nepřekročila námi předem zvolenou mez α, tzv. hladinu testu, volíme zpravidla α = 0,05 nebo 0,01
- Chyba 2. druhu

  Snažíme se ji minimalizovat
- Obě chyby jsou vzájemně nepřímo úměrné. Jestliže H_0 platí (tedy), pravděpodobnost zamítnuti H_0 má být menší než α

1. hypotéza H_0 platí, hypotézu H_0 zamítneme (chyba 1. druhu),
2. hypotéza H_0 platí, hypotézu H_0 nezamítneme,
3. hypotéza H_0 neplatí, hypotézu H_0 zamítneme,
4. hypotéza H_0 neplatí, hypotézu H_0 nezamítneme (chyba 2. druhu)

Chyba testu

- Podobná situace nastává u soudu, kde roli nulové hypotézy hraje presumpce neviny obžalovaného. Soudce na základě předložených důkazů zamítne jeho nevinu a odsoudí ho k trestu nebo naopak nezamítne jeho nevinu a neodsoudí ho, čímž však nijak netvrdí, že obžalovaný je skutečně nevinen. Buď je nevinen, nebo k prokázaní jeho viny nemá soudce dostatek důkazů.
- Stejně ve statistice, jestliže nulovou hypotézu nezamítneme, neznamená to ještě, že H_0 skutečně platí. Buď je pravdivá, nebo pro její zamítnutí nemáme dostatek potřebných měřeni, dostatek informaci.

Chyba testu

1. Nevinen, odsouzen - H_0 platí, H_0 zamítneme (chyba 1. druhu)
2. Nevinen, neodsouzen - H_0 platí, H_0 nezamítneme
3. Vinen, odsouzen - H_0 neplatí, H_0 zamítneme,
4. Vinen, neodsouzen - H_0 neplatí, H_0 nezamítneme (chyba 2. druhu).

Postup výpočtu

- Sestaví se tabulka skutečných (naměřených) relativních četností
- Sestaví se tabulka očekávaných četností
- Podmínky pro použití testu nezávislosti v kontingenční tabulce:

  - nejvíce 20 % teoretických četností může být menších než 5
  - žádná teoretická četnost nesmí být menší než 1

  Pro tabulku 2x2:

  - $n > 40$
  - pokud $20 < n < 40$, pak je nutná úprava testového kritéria pomocí Yatesovy korekce
  - pokud $n < 20$, pak použijeme Fisherův test
- Vypočte se testové kritérium (dosazení do vzorce – výsledek hodnota)
- Testové kritérium se srovná s kritickou hodnotou (tabulková hodnota, je potřeba zohlednit počet stupňů volnosti)
- Je-li testové kritérium $<$ kritická hodnota, potom nezamítáme hypotézu o nezávislosti a nezávislost lze předpokládat

Skutečné četnosti

	znak1 - 1.skupina	**znak1 - 2.skupina**	**...**	**celkem**
znak2 - 1.skupina	skutečné četnosti	skutečné četnosti	...	$n_{1\bullet}$
znak2 - 2.skupina	skutečné četnosti	skutečné četnosti	...	$n_{2\bullet}$
znak2 - 3.skupina	skutečné četnosti	skutečné četnosti	...	$n_{3\bullet}$
...	...	...	...	$n_{i\bullet}$
celkem	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$n_{\bullet j}$	n

$$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij} \quad n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$$

Očekávané četnosti

$$n'_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}$$

	znak1 - 1.skupina	**znak1 - 2.skupina**	**...**	**celkem**
znak2 - 1.skupina	očekávané četnosti	očekávané četnosti	...	$n_{1\bullet}$
znak2 - 2.skupina	očekávané četnosti	očekávané četnosti	...	$n_{2\bullet}$
znak2 - 3.skupina	očekávané četnosti	očekávané četnosti	...	$n_{3\bullet}$
...	...	...	...	$n_{i\bullet}$
celkem	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$n_{\bullet j}$	n

Testové kritérium

$$G = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(n_{ij} - n'_{ij}\right)^2}{n'_{ij}}$$

r	počet řádků
s	počet sloupců
n_{ij}	skutečné četnosti
n'_{ij}	očekávané četnosti

Yatesova korekce (Yatesův chí-kvadrát test)

- upravuje vzorec pro Pearsonův chí-kvadrát test odečtením 0,5 od rozdílu mezi každou sledovanou hodnotou a její očekávanou hodnotou v kontingenční tabulce 2 × 2
- $G = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(n_{ij} - n'_{ij} - 0{,}5\right)^2}{n'_{ij}}$
- snižuje to získanou chí-kvadrát hodnotu a tím zvyšuje její *p*-hodnotu
- zabraňuje nadhodnocení statistické významnosti u malých dat

https://dbterapie.cz/encyklopedie/yatesova-korekce-kontinuity/
Yates, F (1934). Kontingenční tabulka s malými čísly a χ2 test. Journal of the Royal Statistical Society (Supplement) 1: 217-235.

Kritické hodnoty testového kritéria chí-kvadrát

Stupně volnosti	Hladina významnosti	
	0,05	0,01
1	3,841	6,635
2	5,991	9,21
3	7,815	11,341
4	9,483	13,277
5	11,070	15,086
6	12,592	16,812
7	14,067	18,475
8	15,507	20,09
9	16,919	21,666
10	18,307	23,209
11	19,675	24,725
12	21,026	26,217
13	22,362	27,688
14	23,685	29,141
15	24,996	30,578
16	26,296	32
17	27,587	33,409
18	28,868	34,805
19	30,144	36,191
20	31,410	37,566

Příklad 1

- 2 vybrané otázky z dotazníku (2 znaky). Souvisí spolu dosažené vzdělání a péče o zrak?

1. Domníváte se, že se dostatečně pečujete o svůj zrak?

a) ano
b) ne
c) někdy

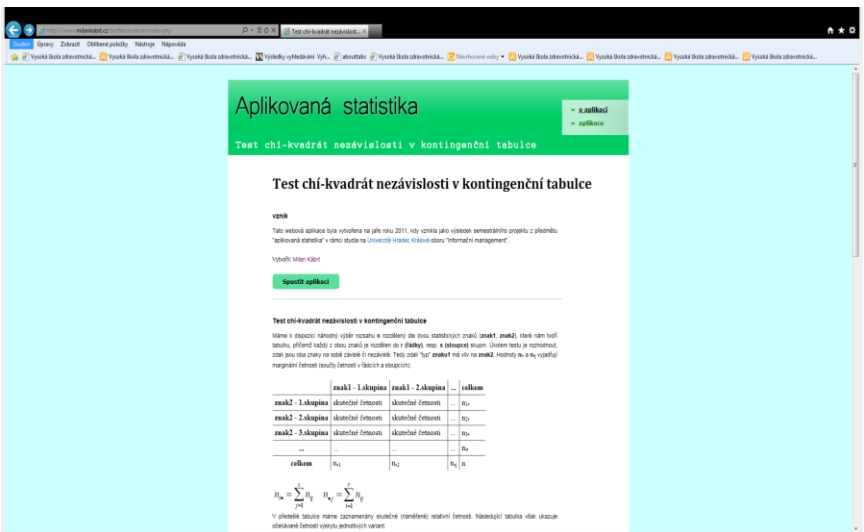
18. Nejvyšší dosažené vzdělání

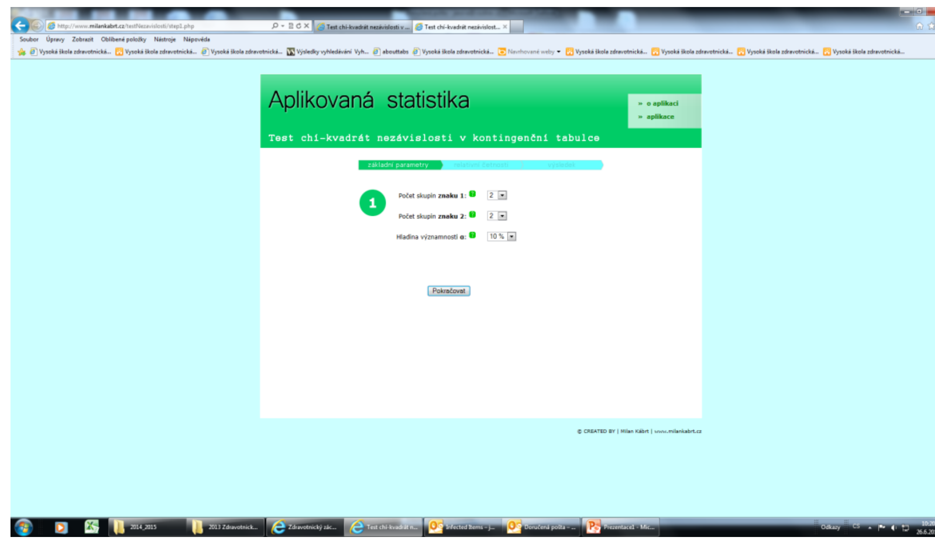
a) základní
b) středoškolské
c) vyšší odborné
d) vysokoškolské

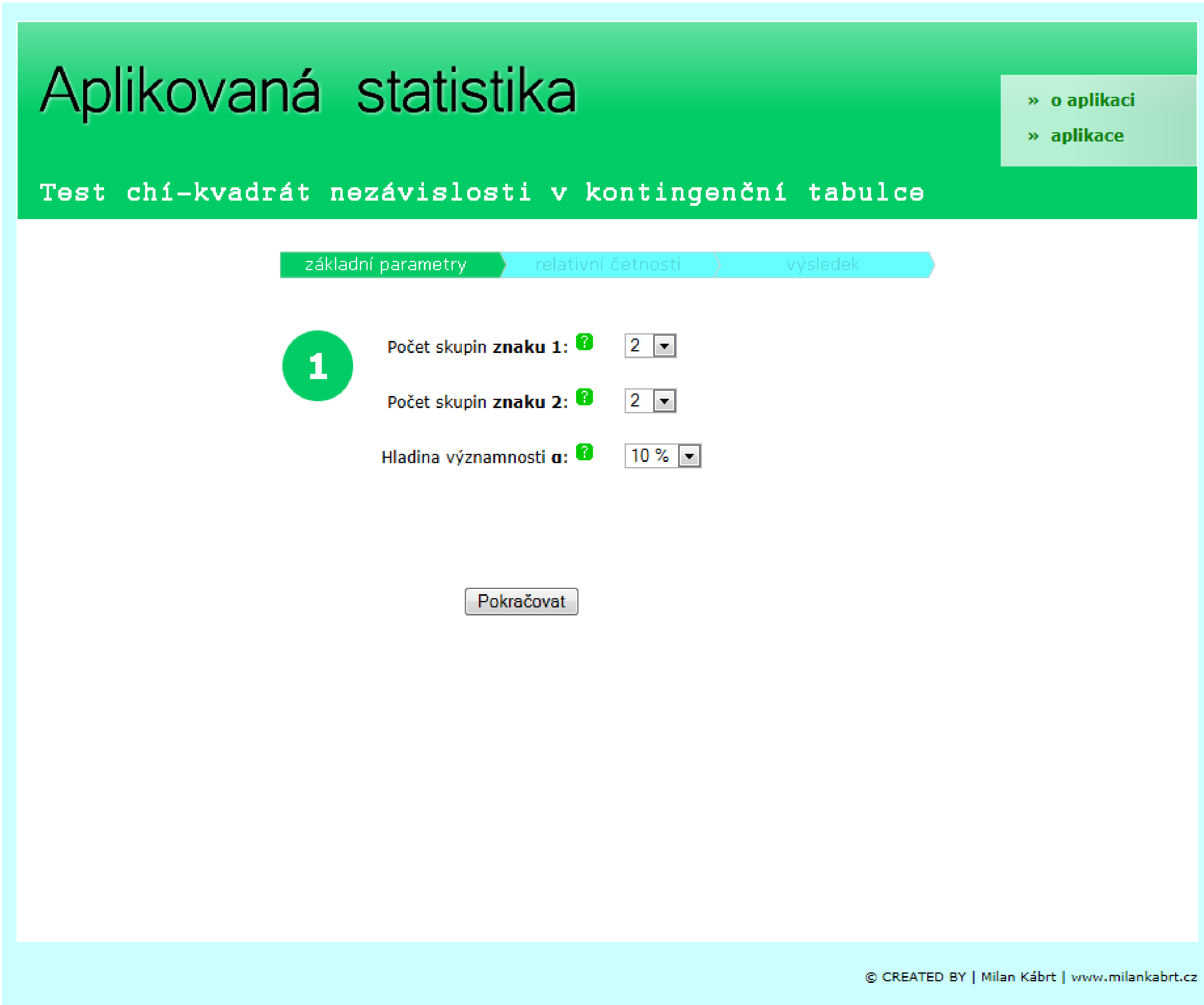
Sestaví se tabulka skutečných (relativních) četností

	základní	SŠ	VOŠ	VŠ	celkem
ano	33	132	28	69	262
někdy	6	74	0	70	150
ne	11	128	6	103	248
celkem	50	334	34	242	660

- http://www.milankabrt.cz/testNezavislosti/index.php







Aplikovaná statistika
» o aplikaci
» aplikace
Test chí-kvadrát nezávislosti v kontingenční tabulce
základní parametry
relativní četnosti
výsledek
1
Počet skupin znaku 1:
2
Počet skupin znaku 2:
2
Hladina významnosti α:
10 %
Pokračovat
© CREATED BY | Milan Kábrt | www.milankabrt.cz

Aplikovaná statistika

» o aplikaci
» aplikace

Test chí-kvadrát nezávislosti v kontingenční tabulce

základní parametry | relativní četnosti | výsledek

1

Počet skupin **znaku 1**: 4

Počet skupin **znaku 2**: 3

Hladina významnosti **α**: 0.05

2

Zadejte do tabulky naměřené relativní četnosti: ?

	znak1 - 1. sk.	**znak1 - 2. sk.**	**znak1 - 3. sk.**	**znak1 - 4. sk.**
znak2 - 1. sk.				
znak2 - 2. sk.				
znak2 - 3. sk.				

zpět **pokračovat**

http://www.milankabrt.cz/testNezavislosti/step2.php

Aplikovaná statistika

» o aplikaci
» aplikace

Test chí-kvadrát nezávislosti v kontingenční tabulce

základní parametry | relativní četnosti | výsledek

1

Počet skupin **znaku 1**: 4

Počet skupin **znaku 2**: 3

Hladina významnosti **α**: 0.05

2

Zadejte do tabulky naměřené relativní četnosti:

	znak1 - 1. sk.	**znak1 - 2. sk.**	**znak1 - 3. sk.**	**znak1 - 4. sk.**
znak2 - 1. sk.	33	132	28	69
znak2 - 2. sk.	6	74	0	70
znak2 - 3. sk.	11	128	6	103

zpět | pokračovat

Výsledek testu

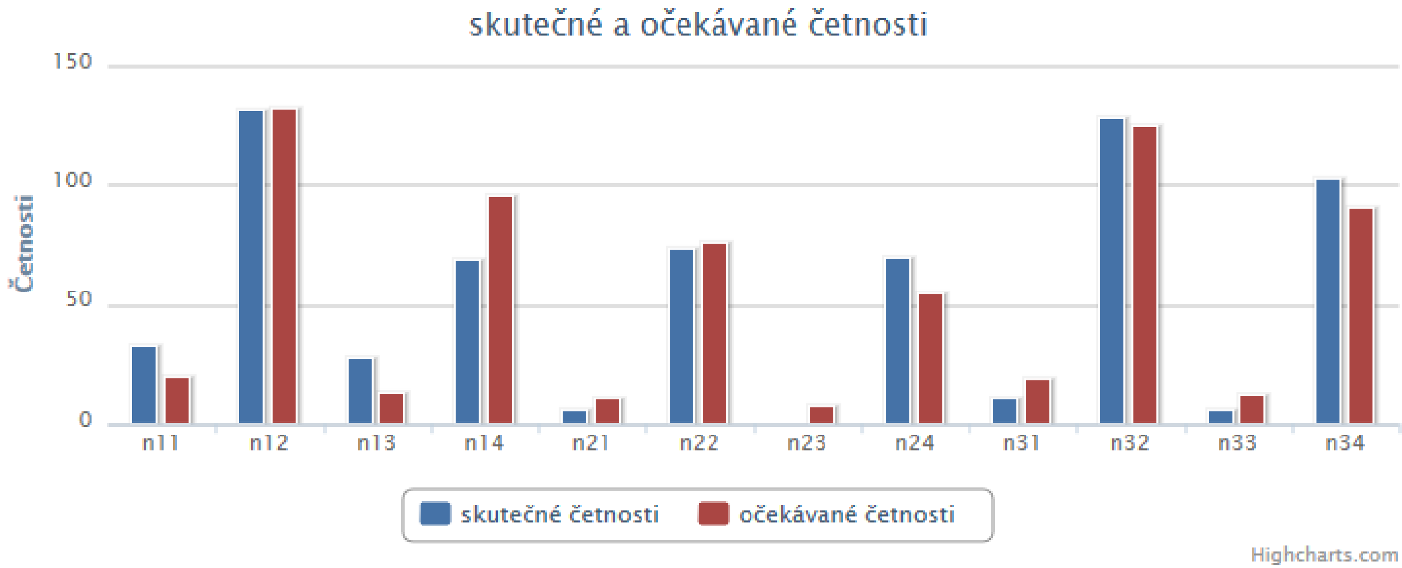
Počet skupin **znaku 1**:	**4**
Počet skupin **znaku 2**:	**3**
Hladina významnosti **α**:	**5 %**

Skutečné četnosti

	znak1 - 1. sk.	znak1 - 2. sk.	znak1 - 3. sk.	znak1 - 4. sk.	$n_{.j}$
znak2 - 1. sk.	33	132	28	69	262
znak2 - 2. sk.	6	74	0	70	150
znak2 - 3. sk.	11	128	6	103	248
$n_{i.}$	50	334	34	242	**660**

Očekávané četnosti

	znak1 - 1. sk.	znak1 - 2. sk.	znak1 - 3. sk.	znak1 - 4. sk.	$n_{.j}$
znak2 - 1. sk.	19.85	132.59	13.5	96.07	262
znak2 - 2. sk.	11.36	75.91	7.73	55	150
znak2 - 3. sk.	18.79	125.5	12.78	90.93	248
$n_{i.}$	50	334	34	242	**660**



testové kritérium:

$$G = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - n'_{ij})^2}{n'_{ij}}$$

Po dosazení do vzorce vychází testové kritérium:
G = 54.792

Kritická hodnota:

Kritická hodnota:
$\chi_{(1-\alpha);\, df}$ = 12.592

Rozhodnutí:

Na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu (H_0) o nezávislosti jednotlivých znaků zamítáme a přijímáme hypotézu H_1, která nám říká, že zde určitá závislost existuje.

Bakalářská práce

- Z našeho dotazníku vyplynulo, že péče o zrak a vzdělání jsou na sobě závislé veličiny. Závislost jsme ověřili pomocí kontingenčních tabulek a použili jsme test chí kvadrát. Kritická mez pro hladinu významnosti byla zvolena 0,05. Vypočtená hodnota testového kritéria je 54,792. Počet stupňů volnosti je 6, kritická hodnota pro 6 stupňů volnosti je 12,592. Protože kritická hodnota je menší než vypočtená hodnota, z provedeného testu vyplývá, že veličiny jsou na sobě závislé.
- Korigovaný koeficient kontingence pomocí Pearsona
- Cramerův koeficient
- Korelace mezi hodnotami je podle … středně silná.

Příklad 2

- 2 vybrané otázky z dotazníku (2 znaky). Souvisí spolu pohlaví a péče o zrak?

1. Domníváte se, že se dostatečně pečujete o svůj zrak?

a) ano
b) ne
c) někdy

16. Pohlaví

a) žena
b) muž

Výsledek testu

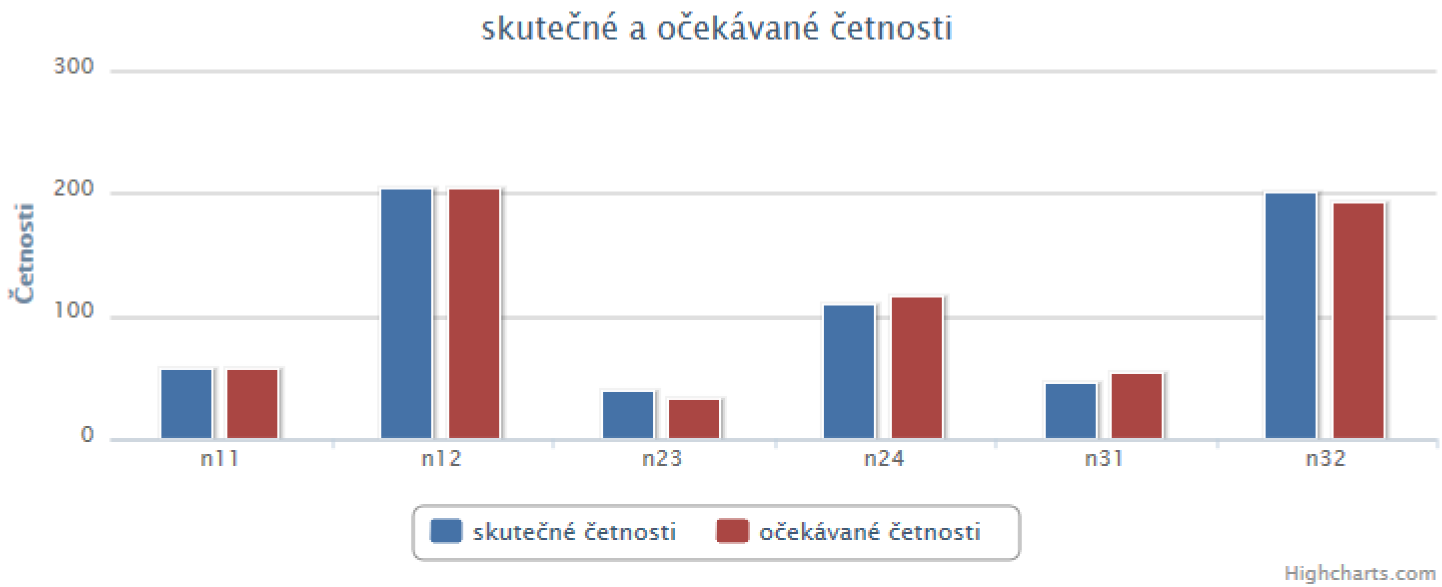
Počet skupin **znaku 1**:	**2**
Počet skupin **znaku 2**:	3
Hladina významnosti α:	**5 %**

Skutečné četnosti

	znak1 - 1. sk.	znak1 - 2. sk.	$n_{.j}$
znak2 - 1. sk.	58	204	262
znak2 - 2. sk.	40	110	150
znak2 - 3. sk.	47	201	248
$n_{i.}$	145	515	**660**

Očekávané četnosti

	znak1 - 1. sk.	znak1 - 2. sk.	$n_{.j}$
znak2 - 1. sk.	57.56	204.44	262
znak2 - 2. sk.	32.95	117.05	150
znak2 - 3. sk.	54.48	193.52	248
$n_{i.}$	145	515	**660**



testové kritérium:

$$G = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - n'_{ij})^2}{n'_{ij}}$$

Po dosazení do vzorce vychází testové kritérium:
G = 3.253

Kritická hodnota:

Kritická hodnota:
$\chi_{(1-\alpha);\, df} = 5.991$

Rozhodnutí:

Na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu (H_0) o nezávislosti jednotlivých znaků nezamítáme.

Bakalářská práce

- Z našeho dotazníku vyplynulo, že péče o zrak a pohlaví na sobě nezávisí. Závislost jsme ověřili pomocí kontingenčních tabulek a použili jsme test chí kvadrát. Kritická mez pro hladinu významnosti byla zvolena 0,05. Vypočtená hodnota testového kritéria je 3,253. Počet stupňů volnosti je 4, kritická hodnota pro 4 stupně volnosti je 5,991. Protože kritická hodnota je větší než vypočtená hodnota, z provedeného testu vyplývá, že veličiny jsou na sobě nezávislé.

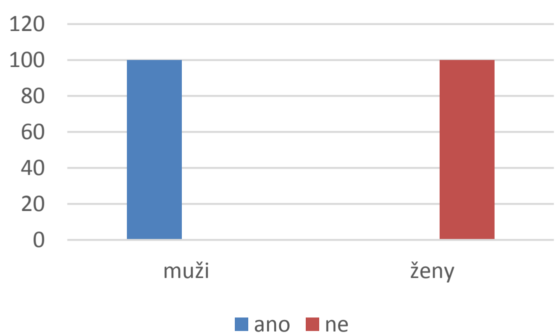
Závislost

Skutečné četnosti

	ano	ne	celkem
muži	100	0	100
ženy	0	100	100
celkem	100	100	200

Očekávané četnosti

	ano	ne	celkem
muži	50	50	100
ženy	50	50	100
celkem	100	100	200



Testová statistika	200
Kritická hodnota	3,841
Pearsonův koeficient	1
Cramerův koeficient	1

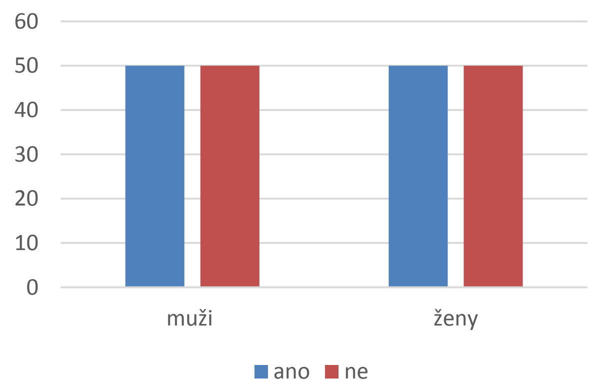
Nezávislost

Skutečné četnosti

	ano	ne	celkem
muži	50	50	100
ženy	50	50	100
celkem	100	100	200

Očekávané četnosti

	ano	ne	celkem
muži	50	50	100
ženy	50	50	100
celkem	100	100	200



Testová statistika	0
Kritická hodnota	3,841
Pearsonův koeficient	0
Cramerův koeficient	0

	ano	ne	celkem
muži	50	50	=SUMA(B2:C2)
ženy	50	50	=SUMA(B3:C3)
celkem	=SUMA(B2:B3)	=SUMA(C2:C3)	=SUMA(B4:C4)
	ano	ne	celkem
muži	=$D2*B$4/$D$4	=$D2*C$4/$D$4	=SUMA(B7:C7)
ženy	=$D3*B$4/$D$4	=$D3*C$4/$D$4	=SUMA(B8:C8)
celkem	=SUMA(B7:B8)	=SUMA(C7:C8)	=SUMA(B9:C9)
testová statistika		=POWER(B2-B7;2)/B7	=POWER(C2-C7;2)/C7
		=POWER(B3-B8;2)/B8	=POWER(C3-C8;2)/C8
		=C11+D11+C12+D12	
kritická hodnota		3,841	
Cramerův koeficient		=ODMOCNINA(C14/D9*(2-1))	
Pearsonův koeficient		=ODMOCNINA((C14/(C14+D4))/((2-1)/2))	

Korigovaný koeficient kontingence pomocí Pearsona

$$C_{kor} = \frac{\sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}}{\sqrt{\frac{m-1}{m}}}$$

kde χ^2 je hodnota testového kritéria

n je rozsah souboru

m je počet řádků nebo počet sloupců v kontingenční tabulce (je-li větší počet řádků, je *m* počet řádků; je-li větší počet sloupců, je m počet sloupců)

Cramerův koeficient

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(m-1)}}$$

χ^2 je hodnota testového kritéria

n je rozsah souboru

m je počet řádků nebo počet sloupců v kontingenční tabulce (je-li větší počet řádků, je *m* počet řádků; je-li větší počet sloupců, je m počet sloupců)

p hodnota - Excel

CHISQ.TEST (funkce)

Vrátí test nezávislosti. Funkce CHISQ.TEST vrátí hodnotu rozdělení chí-kvadrát ($\chi 2$) pro dané testové kritérium a příslušné stupně volnosti. Pomocí testů $\chi 2$ můžete určit, zda experiment potvrzuje předpokládané výsledky.

Syntaxe

CHISQ.TEST(aktuální,očekávané)

p<0,05 $\rightarrow$ nezávislost zamítáme, určitá závislost existuje

p-hodnota

p-hodnota je nejmenší hladina významnosti, při které ještě zamítneme nulovou hypotézu

p-hodnota je pravděpodobnost, že při platnosti nulové hypotézy nabývá testová statistika své stávající hodnoty anebo hodnot ještě extrémnějších (nepříznivějších vůči nulové hypotéze)

p-hodnota je pravděpodobnost, s jakou bychom mohli obdržet pozorovaná data nebo data stejné, či ještě více odporující nulové hypotéze, za předpokladu, že je nulová hypotéza pravdivá. Čím menší je *p*, tím neudržitelnější čili méně důvěryhodná je nulová hypotéza