

STATISTICKÉ  
ZPRACOVÁNÍ DAT –  
FISHERŮV EXAKTNÍ TEST

# Metoda chí kvadrát x Fisherův test

- Pro zjištění závislosti – metoda chí kvadrát
- V některých případech metodu chí kvadrát nelze použít
  - rozsah souboru menší než 20
  - očekávané četnosti jsou malé
- Lze použít Fisherův test - založen na jiném principu
- Fisherův exaktní test je založen na výpočtu přesné (exaktní) pravděpodobnosti, se kterou bychom za platnosti nulové hypotézy o nezávislosti veličin získali naši konkrétní realizaci kontingenční tabulky

# Fisherův test

- Zjišťujeme závislost dvou kvalitativních veličin na prvcích téhož výběru
- Máme náhodný výběr rozsahu  $n$  rozdělený do dvou skupin (skupina 1, skupina 2)
- Skupiny mohou nabývat hodnotu jednoho ze dvou znaků (znak 1, znak 2)
- Příkladem - skupina ženy, muži, znak kouří, nekouří
- Úkolem testu je rozhodnout, zda znaky jsou na sobě závislé nebo nezávislé (zda znak 1 má vliv na znak 2)
- Fisherův exaktní test odvozen pro kontingenční tabulku 2x2 tzv. čtyřpolní tabulku, ale existuje i jeho zobecnění pro libovolnou kontingenční tabulku

# ZÁKLADNÍ PRINCIP FISHEROVA TESTU

- Testujeme nulovou hypotézu proti alternativní hypotéze.
- Nulová hypotéza  $H_0$ : znaky 1 a 2 jsou nezávislé (Pozorované četnosti by měly odpovídat očekávaným četnostem)
- Alternativní hypotéza  $H_1$ : Mezi znaky 1, 2 je závislost
  
- Nepředpokládá se, že teoretické rozdělení četností je známé, ale počítá se přímo pravděpodobnost odchylky od nulové hypotézy
- Při testování se generují varianty pozorované tabulky četností a určuje se pravděpodobnost výskytu všech obměn, které mají stejné součty okrajových četností
- Hlavní myšlenkou testu je výpočet pravděpodobnosti, se kterou bychom získali čtyřpolní tabulky stejně nebo více vzdálené od nulové hypotézy při zachování marginálních četností

# VÝPOČET TESTOVÉ STATISTIKY

|           | Znak 1 | Znak 2 | Součet |
|-----------|--------|--------|--------|
| Skupina 1 | $a$    | $b$    | $a+b$  |
| Skupina 2 | $c$    | $d$    | $c+d$  |
| Součet    | $a+c$  | $b+d$  | $n$    |

Čtyřpolní tabulka

$a, b, c, d$  četnosti  
 $a+b, c+d, a+c, b+d$  okrajové četnosti tzv. marginální četnosti.

- Z hodnot  $a, b, c, d$  se vybere hodnota  $a$  a od té se postupně odečítá a po té přičítá hodnota 1, aby součet okrajových četností zůstal stejný a byly vyčerpány všechny možné případy. Např. pokud se od hodnoty  $a$  odečte 1, musí se k hodnotě  $b$  přičíst 1, k hodnotě  $c$  přičíst 1 a od hodnoty  $d$  odečíst 1, aby okrajové četnosti zůstaly stejné
- Generují se všechny možné varianty tabulky četností
- Pro původní a každou vygenerovanou tabulku se vypočítá pravděpodobnost

# Vzorec pro výpočet pravděpodobnosti

$$p_i = \frac{\binom{a+c}{a} \binom{b+d}{b}}{\binom{n}{a+b}} = \frac{(a+b)! (c+d)! (a+c)! (b+d)!}{n! a! b! c! d!}$$

$p_i$       pravděpodobnost vypočtená z tabulky  $i$

$a, b, c, d$       četnosti uvnitř tabulky  $i$

$n$       rozsah souboru

# Hodnota testového kritéria

- Hodnotou testového kritéria testové statistiky je součet všech vypočtených pravděpodobností menších nebo stejných jako hodnota pravděpodobnosti, která přísluší čtyřpolní tabulce sestrojené na základě pozorovaných hodnot
- Hodnotou testového kritéria se porovnává s hladinou významnosti  $\alpha$
- V případě oboustranného testu se sčítají hodnoty všech vypočtených pravděpodobností u tabulek, které jsou menší nebo rovny než skutečná zjištěná četnost
- Pokud je  $\sum p_i < \alpha$ , potom nulovou hypotézu o nezávislosti zamítáme a přijímáme hypotézu, že určitá závislost existuje

# Příklad 1

- Skupina 1 a 2, znak 1 a 2, zkoumáme závislost mezi skupinami a znaky
- Hladina významnosti 5 %
- Ze získaných dat vytvoříme čtyřpolní tabulku

|           | Znak 1 | Znak 2 | Součet |
|-----------|--------|--------|--------|
| Skupina 1 | 2      | 5      | 7      |
| Znak 2    | 3      | 2      | 5      |
| Součet    | 5      | 7      | 12     |



- Z této tabulky vybereme hodnotu 2 (skupina 1, znak 1) a od hodnoty 2 postupně odečítáme 1 a po té přičítáme hodnotu 1
- Ostatní hodnoty doplňujeme tak, aby součet okrajových četností zůstal stejný
- Dostaneme následující tabulky:

|           | Znak 1 | Znak 2 | Součet |
|-----------|--------|--------|--------|
| Skupina 1 | 0      | 7      | 7      |
| Znak 2    | 5      | 0      | 5      |
| Součet    | 5      | 7      | 12     |

|           | Znak 1 | Znak 2 | Součet |
|-----------|--------|--------|--------|
| Skupina 1 | 1      | 6      | 7      |
| Znak 2    | 4      | 1      | 5      |
| Součet    | 5      | 7      | 12     |

|           | Znak 1 | Znak 2 | Součet |
|-----------|--------|--------|--------|
| Skupina 1 | 3      | 4      | 7      |
| Znak 2    | 2      | 3      | 5      |
| Součet    | 5      | 7      | 12     |

|           | Znak 1 | Znak 2 | Součet |
|-----------|--------|--------|--------|
| Skupina 1 | 4      | 3      | 7      |
| Znak 2    | 1      | 4      | 5      |
| Součet    | 5      | 7      | 12     |

|           | Znak 1 | Znak 2 | Součet |
|-----------|--------|--------|--------|
| Skupina 1 | 5      | 2      | 7      |
| Znak 2    | 0      | 5      | 5      |
| Součet    | 5      | 7      | 12     |

- Pravděpodobnost pro čtyřpolní tabulku sestrojenou na základě pozorovaných hodnot je 0,265152
- Menší nebo stejné hodnoty nabývají pravděpodobnosti  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_5$
- Hodnota testové statistiky ( $p$ -hodnota) je součet všech vypočtených pravděpodobností menších nebo stejných jako hodnota pravděpodobnosti pro čtyřpolní tabulku sestrojenou na základě pozorovaných hodnot, tzn., že je
 
$$\sum p_i = p_1 + p_2 + p + p_3 + p_5 = 0,001263 + 0,044192 + 0,265152 + 0,220960 + 0,026515 = 0,558082$$
- Není splněna podmínka  $\sum p_i < \alpha$ , platí  $\sum p_i > 0,05$ , nulovou hypotézu o nezávislosti přijímáme a lze konstatovat, že mezi skupinami 1 a 2 a znaky 1 a 2 není závislost

- Generování všech možných variant tabulky četností je poměrně pracné, ale existuje řada programů, kde stačí zadat hodnoty zjištěných četností do tabulky a výsledkem je hodnota testové statistiky
- Příkladem vhodného programu je odkaz na <http://www.langsrud.com/fisher.htm>
- Aplikaci, která umožňuje zobecnění na kontingenční tabulku max 2x5 <https://quantitativeskills.com/sisa/statistics/fiveby2.htm>

# Příklad 2

- <http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickyh-a-biologickyh-dat--analyza-a-management-dat-pro-zdravotnicke-obory--testovani-hypotez-o-kvalitativnich-promennych--fisheruv-exaktni-test>